Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações

Daniel Tomaz de Araújo

João Pessoa – PB
Agosto de 2016

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós–Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações

por

Daniel Tomaz de Araújo

sob a orientação do

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino

e sob a co-orientação do

Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

João Pessoa – PB
Agosto de 2016

A663d Araújo, Daniel Tomaz de.

Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações / Daniel Tomaz de Araújo.- João Pessoa, 2016.

87f.

Orientador: Daniel Marinho Pellegrino

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Desigualdade de Hölder. 3. Desigualdade de Bohnenblust-Hille. 4. Desigualdade de Hardy-Littlewood. 5. Operadores multilineares múltiplo somantes.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Desigualdade de Hölder generalizada com normas mistas e aplicações

por

Daniel Tomaz de Araújo [1]

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Aprovada em 10 de Agosto de 2016.

Banca Examinadora:

Daniel M. Pellegrino

Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino – UFPB
(Orientador)

Diana M. Serrano R.

Prof. Dra. Diana Marcela Serrano Rodríguez – UFPE
(Examinador Externo)

Joedson S. Santos.

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)

Daniel Núñez Alarcón

Prof. Dr.Daniel Núñez Alarcón – UFPE
(Suplente)

[1] O autor foi bolsista do(a) Prof. Dr. Daniel Marinho Pellegrino durante a elaboração desta dissertação.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pelo dom da vida. Aos meus pais, Hélio Tomaz de Araújo e Maria Daguia Costa de Araújo pelo amor incondicional, responsáveis por tudo o que hoje sou. Aos meus irmãos, Diego, Douglas (*in memorian*), Ana Beatriz e a pequena Alice. O amor de vocês é o que me faz não desistir nunca.

Ao meu orientador Professor Daniel Pellegrino, pela oportunidade de poder concretizar este trabalho, sempre com muita paciência e dedicação, a quem tenho muito respeito e extrema admiração, não só como profissional, mas também como pessoa de caráter único.

Ao meu coorientador e porque não orientador também, o professor Nacib Albuquerque, um dos grandes responsáveis pela construção do trabalho, presente do início ao fim, sempre acessível, dedicado e conciso nas correções, buscando o melhor para o trabalho. Foi uma honra para mim estar ao lado de vocês dois.

Ao meu amor Jéssica Patrícia, pela paciência imensurável e pela compreensão durante todo este período. Seu carinho foi crucial para superar todas as dificuldades.

Aos meus eternos amigos da residência universitária da UFRN, Leandro Lima, Emanuel Carlos, Sérgio Balbino e Adailton. A amizade de vocês não tem preço. Ninguém consegue nada na vida sem amigos de verdade. Aos meus colegas de mestrado, Tony Lopes, Zé Gonçalves (Zezinho), Pedro Pantoja, pelos momentos de estudo que podemos compartilhar nessa longa caminhada. E aos demais colegas da pós-graduação de Matemática.

Aos professores do Departamento pelo conhecimento repassado, Elisandra, Andrade, Miriam, Everaldo, Adriano, Uberlândio. Aos professores da banca, pela disponibilidade e pelas sugestões valiosas. Ao professor Ronaldo Freire de Lima da UFRN, não só pelo papel de professor, mas pelo incentivo em nos fazer acreditar que sempre fomos capazes de alcançar este patamar. Aos meus eternos professores da Escola Cipriano Lopes Galvão, pelo apoio e incentivo de sempre.

Ao meus tios maternos e paternos, Chagas, Maria, Rosinério, e em especial ao meu tio Paulo, que sempre foi mais que um pai para mim. Obrigado por tudo.

Aos funcionários do Departamento, pelo empenho em nos fornecer as melhores condições de produzir ciência.

Por fim, aos meus familiares e amigos do meu velho sítio Totoró, lugar onde nasci e construí os verdadeiros valores da vida.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos uma versão pouco conhecida da famosa Desigualdade de Hölder, considerando o contexto dos espaços L_p e ℓ_p com normas mistas. Mostramos como o uso adequado desta desigualdade vem influenciando positivamente outras desigualdades clássicas, a destacar, as desigualdades multilineares de Bohnenblust-Hille e Hardy-Littlewood.

Palavras-chave: Desigualdade de Hölder, Desigualdade de Bohnenblust-Hille, Desigualdade de Hardy-Littlewood, Operadores multilineares múltiplo somantes.

Abstract

In this work, we present a version little know of the famous Hölder's Inequality, considering the context of L_p and ℓ_p spaces for mixed norms. We show how a suitable use this inequality has influencied positively others classical inequalities, to highlight, the multilinear inequalities of Bohnenblust-Hille and Hardy-Littlewood.

Keywords: Hölder's inequality, Bohnenblust-Hille inequality, Hardy-Littlewood inequality, multiple summing operators .

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentamos uma versão pouco conhecida da desigualdade clássica de Hölder em espaços caracterizados por normas mistas, exibindo algumas aplicações recentes no ambiente multilinear, com o auxílio de outras desigualdades clássicas como, por exemplo, a desigualdade de Bonhenblust-Hille. Historicamente, a desigualdade de Hölder foi descoberta de modo independente por Leonard James Rogers (1862-1933) em 1888 e Otto Hölder (1859-1937) em 1889. Um caso particular bastante conhecido dos cursos de Análise Real e Álgebra Linear ocorre quando consideramos $p = q = 2$. Ela é a famosa desigualdade de Cauchy-Bunyakovski-Schwarz.

Em Análise Funcional, a desigualdade clássica de Hölder é crucial para provar a desigualdade de Minkowski, comumente conhecida como desigualdade triangular nos espaços L_p. Outra situação concreta, por exemplo, é mostrar que o dual do espaço L_p é o espaço L_q para $p \in [1, \infty)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

A motivação para o presente trabalho foi o estudo de uma versão da desigualdade de Hölder que apareceu em espaços L_p com normas mistas, fruto de trabalhos de Luxemburg [27] em 1955 e de A. Benedeck e R. Panzone [9] em 1961. A teoria de espaços L_p com normas mistas tem sido explorada em trabalhos de Equações Diferenciais, mas apenas recentemente começou a ser explorada na Análise Funcional ajudando na solução do célebre problema do raio de Bohr que aparece na teoria de Séries de Dirichlet e com aplicações em resultados de Teoria da Informação Quântica.

No presente trabalho ilustramos aplicações recentes da desigualdade de Hölder para normas mistas, como em resultados relacionados às desigualdades de Bohnenblust-Hille e Hardy-Littlewood, avaliando a dependência que surge em n quando o expoente ótimo das desigualdades é perturbado. Estudamos também a relação com a teoria de operadores múltiplos somantes.

Nossa principal referência foi [2]. Nela, os autores apresentam resultados que necessitam da aplicação da desigualdade de Hölder com normas mistas.

Estrutura do Texto

O primeiro capítulo foi dedicado à Desigualdade de Hölder para normas mistas. Nele, exibimos algumas de suas versões clássicas até chegar ao resultado principal, a Desigualdade de Hölder com normas mistas, apresentando uma demonstração formal. Discorremos também sobre algumas propriedades básicas dos espaços L_p e ℓ_p com normas mistas. Finalizamos o capítulo com um corolário dessa nova Desigualdade de Hölder, tão eficaz quanto a própria desigualdade em algumas aplicações.

No Capítulo 2 realizamos um apanhado de alguns resultados relacionados a somabilidade de aplicações multilineares. Começamos com resultados básicos da teoria dos espaços de Banach e teoremas clássicos como o de Grothendieck e Dvoretzky-Rogers. Enfatizamos o papel dos operadores absolutamente somantes e suas ramificações, como os operadores $p-$somantes, $(q;p)$ $-$somantes e múltiplos somantes, destacando algumas propriedades básicas. Para encerrar o capítulo, apresentamos alguns resultados recentes relacionados a essa teoria.

O Capítulo 3 foi destinado a aplicações da desigualdade vista no Capítulo 1, com base na referência [2]. Inicialmente, exibimos a Desigualdade de Bohnenblust-Hille, resultado de fundamental importância nas estimativas propostas. Nesta etapa, recorremos a Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund para obtenção da otimalidade dos expoentes na maior parte dos teoremas. Finalizamos o capítulo com algumas aplicações como , por exemplo, a Desigualdade $\frac{4}{3}$ de Littlewood, enfatizando que o expoente ótimo $\frac{4}{3}$ pode ser obtido por meio de interpolação de outros expoentes adequados.

Por fim, o apêndice foi dedicado à demonstração de resultados que foram cruciais durante seu desenvolvimento. Elaboramos também uma outra demonstração da Desigualdade de Hölder com normas mistas, considerando o espaço L_p.

Notação e Terminologia

• Em todo este texto, $\mathbb{K}$ sempre denotará o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

• O termo "operador "será usado no mesmo sentido de "função".

• Na maior parte do texto, usaremos $X, Y, E, F, G, H, E_i, F_i, \ldots$ para nos referimos a espaços de Banach. A norma de um espaço de Banach E será usualmente denotada por $||.||$. Por B_E representamos a bola unitária fechada do espaço de Banach E, isto é, $\{x \in E; ||x|| \leq 1\}$ e $S_E = \{x \in E; ||x|| = 1\}$ a esfera unitária do mesmo espaço E.

• O dual topológico de um espaço de Banach E será denotado por E'.

• Denotaremos por p^* o expoente conjugado de $p \in (1, \infty)$, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Convencionaremos $1^* = \infty$.

• $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ representará o espaço de Banach formado por todas as aplicações $m-$lineares contínuas $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ munido com a norma do supremo,

$$||T|| = \sup_{x \in B_{E_1 \times \cdots \times E_m}} ||Tx|| \, .$$

Quando $E_1 = \cdots = E_m$ escreveremos simplesmente $\mathcal{L}(^m E_i; F)$.

• $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ denotará o conjunto formado pelas sequências cujas entradas são elementos de $\mathbb{K}$.

• Alguns espaços importantes serão frequentes no texto:

$\ell_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sum_n |x_n|^p < \infty \right\}$;

$\ell_\infty = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; \sup_n |x_n| < \infty \right\}$;

$\ell_p^n = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell_p;\ x_i = 0,\ \forall i \geq n+1 \right\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}^n$ com a norma ℓ_p;

$c_0 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}};\ x_n \longrightarrow 0 \right\}$.

• Dado um inteiro positivo m e um subconjunto não-vazio $D \subset \mathbb{N}$, denotamos o conjunto de multi-índices $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m)$, com $i_k \in D$ por

$$\mathcal{M}\left(m, D\right) = \{ \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m; i_k \in D,\ k = 1, \ldots, m \} = D^m.$$

• Denotaremos também

$$\mathcal{M}\left(m, n\right) = \mathcal{M}\left(m, \{1, 2, \ldots, n\}\right).$$

Capítulo 1

Desigualdade de Hölder com normas mistas

1.1 Espaços L_p com norma mista

O propósito desta seção é apresentar alguns conceitos importantes relacionados aos espaços L_p com normas mistas, enfatizando notações e propriedades intrínsecas que serão cruciais para a compreensão da Desigualdade de Hölder neste contexto. Os primeiros indícios de estudos sobre espaços com essa natureza são creditados a Luxemburg [27] em 1955 e posteriormente com A. Benedeck e R. Panzone [9] em 1961. Em [9], os autores apresentam um arsenal de resultados envolvendo estes espaços, conectando-os com resultados clássicos de teoria da medida, dentre outros o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência dominada de Lebesgue.

Consideremos $(X_i, \sum_i, \mu_i)$, com $i = 1, \ldots, m$, espaços de medida σ-finita. Denotaremos por

$$(\mathbf{X}, \textstyle\sum, \mu) = \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{m} X_i, \prod_{i=1}^{m} \textstyle\sum_i, \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mu_i \right)$$

o espaço produto munido com a medida produto.

Para $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty]^m$, chamado algumas vezes de expoente múltiplo, denotaremos por $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$ o espaço formado por todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) que satisfazem a seguinte propriedade:

Para qualquer $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in X_1 \times \cdots \times X_{m-1}$, a função avaliada neste ponto $f(x_1, \ldots, x_{m-1}, \cdot) \in L_{p_m}(\mathbf{X}_m)$. Isto significa mais precisamente que

$$||f||_{p_m} := ||f(x_1, \ldots, x_{m-1}, \cdot)||_{p_m} < \infty,$$

e $||f||_{p_m} : X_1 \times \cdots \times X_{m-1} \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma função mensurável em $\left(\prod_{i=1}^{m-1} X_i, \prod_{i=1}^{m-1} \sum_i, \prod_{i=1}^{m-1} \mu_i \right)$. Sucessivamente, se tomarmos $1 < k < m$, para qualquer $(x_1, \ldots, x_{m-k}) \in X_1 \times \cdots \times X_{m-k}$, a função

$$||f(x_1, \ldots, x_{m-k}, \cdot)||_{(p_{m-k+1},\ldots,p_m)} : X_{m-k+1} \times \cdots \times X_m \longrightarrow \mathbb{K}$$

é uma função mensurável em $L_{(p_{m-k+1},\ldots,p_m)}(X_{m-k+1} \times \cdots \times X_m)$. Ou seja,

$$\begin{aligned} & ||f(x_1, \ldots, x_{m-k}, \cdot, \ldots, \cdot)||_{(p_{m-k+1},\ldots,p_m)} \\ & = \left|\left|\left|\left| ||f(x_1, \ldots, x_{m-k}, \cdot, \ldots, \cdot)||_{p_m} \cdots \right|\right|_{p_{m-k+2}} \right|\right|_{p_{m-k+1}} < \infty. \end{aligned}$$

Logo,

$$||f||_{\mathbf{p}} = ||f||_{(p_1,\ldots,p_m)} \stackrel{\text{def}}{=} \left|\left| ||f||_{(p_2,\ldots,p_m)} \right|\right|_{p_1}.$$

Por simplicidade de notação, consideremos o caso em que $p_i < \infty$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Neste caso, dizemos que uma função mensurável $f : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ é um elemento do espaço $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$ se, e somente se,

$$||f||_{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{X_1} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |f|^{p_m} \, d\mu_m \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Dadas $f, g : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ em $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, definimos a função produto $f.g$, como o produto pontual entre f e g , isto é,

$$f.g(x_1, \ldots, x_m) \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1, \ldots, x_m) . g(x_1, \ldots, x_m).$$

Sucessivas aplicações da desigualdade de Minkowski nos permitem constatar que $||.||_{\mathbf{p}}$ define uma norma em $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$. De fato, é imediato que se $||f||_{\mathbf{p}} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ μ a.e. Agora, considere $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, com $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty)^m$. Então,

$$\begin{aligned} ||\lambda f||_{\mathbf{p}} & \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{X_1} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |\lambda f|^{p_m} \, d\mu_m \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ & = \left(\int_{X_1} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |\lambda|^{p_m} |f|^{p_m} \, d\mu_m \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p_1}}. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de integração, segue que

$$\left(\int_{X_1}\left(\cdots\left(\int_{X_m}|\lambda|^{p_m}|f|^{p_m}d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$=|\lambda|^{p_m\cdot\frac{p_{m-1}}{p_m}\cdots\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{p_1}}\cdot\left(\int_{X_1}\left(\cdots\left(\int_{X_m}|f|^{p_m}d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$=|\lambda|\,.\,||f||_{\mathbf{p}}\,.$$

Resta-nos portanto, mostrar a desigualdade triangular. Para uma melhor compreensão, iremos proceder usando indução sobre m, juntamente com o auxílio da Desigualdade de Minkowski.

Considere $m=2$. Sejam $\mathbf{p}=(p_1,p_2)\in[1,\infty)^2$ e $f,g:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, com $\mathbf{X}=X_1\times X_2$. Por definição,

$$||f||_{(p_1,p_2)}=\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f|^{p_2}d\mu_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\quad\text{e}$$

$$||g||_{(p_1,p_2)}=\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|g|^{p_2}d\mu_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

Fixado $x_1\in X_1$, pela maneira como definimos o espaço $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, $f(x_1,\cdot)\in L_{p_2}(X_2)$ e $g(x_1,\cdot)\in L_{p_2}(X_2)$. Pela desigualdade de Minkowski, $f+g\in L_{p_2}(X_2)$ e, além disso,

$$||f+g||_{p_2}\leq||f||_{p_2}+||g||_{p_2}\,,$$

ou seja,

$$\left(\int_{X_2}|f+g|^{p_2}d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\leq\left(\int_{X_2}|f|^{p_2}d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2}}+\left(\int_{X_2}|g|^{p_2}d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Note que,

$$||f||_{p_2}:X_1\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{p_1}(X_1)$$

$$||g||_{p_2}:X_1\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{p_1}(X_1)\,.$$

Logo,

$$||f+g||_{p_2}:X_1\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{p_1}(X_1)\,.$$

Aplicando novamente a Desigualdade de Minkowski segue que

$$\begin{aligned}\left|\left|\,||f+g||_{p_2}\right|\right|_{p_1} &\leq \left|\left|\,||f||_{p_2}+||g||_{p_2}\right|\right|_{p_1}\\ &\leq \left|\left|\,||f||_{p_2}\right|\right|_{p_1}+\left|\left|\,||g||_{p_2}\right|\right|_{p_1}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}&||f+g||_{(p_1,p_2)} \stackrel{\text{def}}{=} \left|\left|\,||f+g||_{p_2}\right|\right|_{p_1}\\ &=\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f+g|^{p_2}\,d\mu_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq\left(\int_{X_1}\left[\left(\int_{X_2}|f|^{p_2}\,d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2}}+\left(\int_{X_2}|g|^{p_2}\,d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2}}\right]^{p_1}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f|^{p_2}\,d\mu_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}+\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|g|^{p_2}\,d\mu_2\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\stackrel{\text{def}}{=}||f||_{(p_1,p_2)}+||g||_{(p_1,p_2)}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$||f+g||_{\mathbf{p}}\leq||f||_{\mathbf{p}}+||g||_{\mathbf{p}}.$$

Suponhamos que o resultado seja válido para $m-1$. Vamos mostrar que o mesmo é válido para m. De fato, sejam $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_m)\in[1,\infty)^m$ e $f,g:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$, com $\mathbf{X}=X_1\times X_2\times\cdots\times X_m$. Com isso, fixado $x_1\in X_1$, segue que $f(x_1,\cdot,\ldots,\cdot)\in L_{(p_2,\ldots,p_m)}(X_2\times\cdots\times X_m)$ e $g(x_1,\cdot,\ldots,\cdot)\in L_{(p_2,\ldots,p_m)}(X_2\times\cdots\times X_m)$. Pela hipótese de indução,

$$f+g\in L_{(p_2,\ldots,p_m)}(X_2\times\cdots\times X_m),$$

e, além disso, pela Desigualdade de Minkowski,

$$||f+g||_{(p_2,\ldots,p_m)}\leq||f||_{(p_2,\ldots,p_m)}+||g||_{(p_2,\ldots,p_m)}.$$

Por outro lado, observe que

$$\begin{aligned}||f||_{(p_2,\ldots,p_m)}&:X_1\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{p_1}(X_1)\\ ||g||_{(p_2,\ldots,p_m)}&:X_1\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{p_1}(X_1).\end{aligned}$$

Logo,

$$||f+g||_{(p_2,\ldots,p_m)}:X_1\longrightarrow\mathbb{K}\in L_{p_1}(X_1).$$

Aplicando novamente a Desigualdade de Minkowski, tem-se que

$$\begin{aligned}\left|\left|||f+g||_{(p_2,\ldots,p_m)}\right|\right|_{p_1} &\leq \left|\left|||f||_{(p_2,\ldots,p_m)}+||g||_{(p_2,\ldots,p_m)}\right|\right|_{p_1}\\ &= \left|\left|||f||_{(p_2,\ldots,p_m)}\right|\right|_{p_1}+\left|\left|||g||_{(p_2,\ldots,p_m)}\right|\right|_{p_1}.\end{aligned}$$

Isto significa mais precisamente que

$$\begin{aligned}&\left(\int_{X_1}\left(\cdots\left(\int_{X_m}|f+g|^{p_m}\,d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &\leq\left(\int_{X_1}\left(\cdots\left(\int_{X_m}|f|^{p_m}\,d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ &+\left(\int_{X_1}\left(\cdots\left(\int_{X_m}|g|^{p_m}\,d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\cdots\right)^{\frac{p_1}{p_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1}}.\end{aligned}$$

Pela definição de norma mista,

$$||f+g||_{\mathbf{p}}\overset{\text{def}}{=}||f+g||_{(p_1,\ldots,p_m)}\leq||f||_{(p_1,\ldots,p_m)}+||g||_{(p_1,\ldots,p_m)}=||f||_{\mathbf{p}}+||g||_{\mathbf{p}}.$$

Portanto, $||.||_{\mathbf{p}}$ define uma norma em $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$. Além disso, o espaço $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$ com sua norma mista é um espaço de Banach. Para mais detalhes recomendamos [9, Theorem 1.b].

1.2 Espaços de sequências com norma mista

Os espaços de sequências são casos particulares dos espaços L_p, e serão estes os mais utilizados no nosso trabalho.

Consideraremos em nosso estudo o espaço de medida $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_c)$, formado pela $\sigma-$álgebra do conjunto das partes $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, em conjunto com a medida de contagem μ_c.

Dado $p\in[1,\infty]$, definimos

$$\ell_p:=L_p(\mathbb{N})=\left\{(\alpha_n)_n\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}};||(\alpha_n)_n||_p<\infty\right\}.$$

Agora, dados $\mathbf{p}=(p_1,\ldots,p_m)\in[1,\infty]^m$ e uma matriz escalar $\mathbf{a}=(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^m}$ de múltiplos índices, denotamos por

$$\ell_{\mathbf{p}}=L_{\mathbf{p}}(\mathbb{N}^m)\overset{\text{def}}{=}\left\{\mathbf{a}=(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^m};||\mathbf{a}||_{\mathbf{p}}<\infty\right\},$$

onde

$$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m.$$

Em particular, para $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_m) \in [1, \infty)^m$, dizemos que $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} \in \ell_{\mathbf{p}}$ se, e somente se,

$$||\mathbf{a}||_{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |a_{\mathbf{i}}|^{p_m} \right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}} \cdots \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

A demonstração de que $||.||_{\mathbf{p}}$ define uma norma segue o mesmo raciocínio apresentado na seção anterior, utilizando várias vezes a Desigualdade de Minkowski.

Com isso, dado E espaço de Banach, definimos o espaço de sequências com norma mista por

$$\ell_{\mathbf{p}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \ell_{p_1}\left(\ell_{p_2}\left(\ldots\left(\ell_{p_m}(E)\right)\ldots\right)\right).$$

Em particular, quando tivermos $E = \mathbb{K}$, denotaremos,

$$\ell_{\mathbf{p}}(\mathbb{K}) = L_{\mathbf{p}}(\mathbb{N}^m) = \ell_{\mathbf{p}}.$$

Uma informação de extrema relevância é que a ordem na qual somamos ou integramos em espaços com norma mista é de fundamental importância, assim como a ordem dos expoentes, conforme ilustram os exemplos a seguir.

Exemplo 1.1. Consideremos a matriz de múltiplos índices $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{2^i j}\right)_{i,j=1}^{\infty}$. Por um lado

$$\begin{aligned}
\sum_i \left(\left(\sum_j \left(\frac{1}{2^i j} \right)^1 \right)^{\frac{1}{1} \times 2} \right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_i \frac{1}{2^i} \left(\sum_j \left(\frac{1}{j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_j \left(\frac{1}{j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_i \frac{1}{2^i} < \infty,
\end{aligned}$$

e, por outro lado,

$$\sum_j \left(\left(\sum_i \left(\frac{1}{2^i j} \right)^1 \right)^{\frac{1}{1} \times 2} \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_j \frac{1}{j} \left(\sum_i \left(\frac{1}{2^i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Exemplo 1.2. Considerando a mesma matriz do exemplo anterior,

$$||\mathbf{a}||_{(1,2)} \overset{\text{def}}{=} \sum_i \left(\sum_j \left(\frac{1}{2^i j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i \frac{1}{2^i} \right) \cdot \left(\sum_j \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Entretanto, $\mathbf{a} \notin \ell_{(2,1)}$, visto que

$$||\mathbf{a}||_{(2,1)} \overset{\text{def}}{=} \sum_i \left(\left(\sum_j \frac{1}{2^i j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \infty.$$

Exemplo 1.3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}, \text{ se } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Embora $F \in L_{(1,2)}(\mathbb{R}^2) \cap L_{(2,1)}(\mathbb{R}^2)$, veremos que $||F||_{(1,2)} \neq ||F||_{(2,1)}$. De fato, note que,

$$||F||_{(1,2)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}} dx \right)^{\frac{1}{1}} = \int_0^1 \left(\int_0^x \left| x^{-\frac{1}{2}} \right|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Calculando a integral,

$$\left(\int_0^x \left| x^{-\frac{1}{2}} \right|^2 dy \right) = x^{-1}.x \Big|_0^x = 1.$$

E daí,

$$\left(\int_0^1 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Portanto,

$$||F||_{(1,2)} = 1$$

Por outro lado,

$$||F||_{(2,1)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|^1 \, dy \right)^{\frac{2}{1}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^x \left| x^{-\frac{1}{2}} \right| dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculando a integral, obtemos

$$\left(\int_0^x \left| x^{-\frac{1}{2}} \right| dy \right)^2 = \left(x^{-\frac{1}{2}}.x \right)^2 = x.$$

E daí,

$$\left(\int_0^1 x dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$||F||_{(2,1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

1.3 Desigualdade de Hölder com norma mista

Durante o nosso texto, dado $\mathbf{p} \in [1, \infty]^m$, denotaremos por $\ell_{\mathbf{p}} = L_{\mathbf{p}}(\mathbb{N}^m)$, o espaço formado por todas as matrizes de múltiplos índices $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$, cuja norma$-\mathbf{p}$ é finita. Dadas duas matrizes $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$ e $\mathbf{b} = (b_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$ definimos o produto entre elas pontualmente, isto é,

$$\mathbf{ab} = (a_{\mathbf{i}} b_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}.$$

Dizemos que uma matriz $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} \in \ell_{\mathbf{p}}$ se, e somente se,

$$||\mathbf{a}||_{\mathbf{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|a_{\mathbf{i}}|^{p_m}\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}\right)^{\frac{p_{m-2}}{p_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{p_2}{p_3}}\right)^{\frac{p_1}{p_2}}\right)^{\frac{1}{p_1}} < \infty.$$

Teorema 1.1. ***(Desigualdade clássica de Hölder em espaços $\ell_{\mathbf{p}}$)***

Sejam $r \in (0, \infty]$, $p_1, \ldots, p_N \in (0, \infty]$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_N}$. Se cada $a_k = (a_{ki})_{i \in \mathbb{N}} \in \ell_{p_k}$, com $k = 1, \ldots, N$, então $a_1 \cdots a_N \in \ell_r$ e, além disso,

$$||a_1 \cdots a_N||_r \leq ||a_1||_{p_1} \cdots ||a_N||_{p_N}.$$

Demonstração. Procederemos por indução sobre N. Primeiramente vejamos o caso em que $N = 2$ e $r = 1$. Note que esta situação é exatamente a Desigualdade clássica de Hölder. De fato, consideremos $a_1 = \frac{|a_{1i}|}{||a_1||_{p_1}}$ e $a_2 = \frac{|a_{2i}|}{||a_2||_{p_2}}$. Se $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ a desigualdade é imediata. Com o auxílio da Desigualdade de Young, [22, Prop.4.1.3], garantimos que

$$a_1.a_2 \leq \frac{1}{p_1}a_1^{p_1} + \frac{1}{p_2}a_2^{p_2}, \text{ com } \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Por conseguinte,

$$\frac{|a_{1i}|}{||a_1||_{p_1}} . \frac{|a_{2i}|}{||a_2||_{p_2}} \leq \frac{1}{p_1}\frac{|a_{1i}|^{p_1}}{||a_1||_{p_1}^{p_1}} + \frac{1}{p_2}\frac{|a_{2i}|^{p_2}}{||a_2||_{p_2}^{p_2}}.$$

Assim,

$$\sum_i \frac{|a_{1i}|}{||a_1||_{p_1}} . \frac{|a_{2i}|}{||a_2||_{p_2}} \leq \frac{1}{p_1}\sum_i \frac{|a_{1i}|^{p_1}}{||a_1||_{p_1}^{p_1}} + \frac{1}{p_2}\sum_i \frac{|a_{2i}|^{p_2}}{||a_2||_{p_2}^{p_2}}.$$

Reorganizando, obtemos

$$\sum_i \frac{|a_{1i}|}{||a_1||_{p_1}} \cdot \frac{|a_{2i}|}{||a_2||_{p_2}} \leq \frac{1}{p_1 \, ||a_1||_{p_1}^{p_1}} \sum_i |a_{1i}|^{p_1} + \frac{1}{p_2 \, ||a_2||_{p_2}^{p_2}} \sum_i |a_{2i}|^{p_2} .$$

Por outro lado, observe que

$$||a_1||_{p_1}^{p_1} = \sum_i |a_{1i}|^{p_1} \;\text{ e }\; ||a_2||_{p_2}^{p_2} = \sum_i |a_{2i}|^{p_2} .$$

Com isso,

$$\sum_i \frac{|a_{1i}|}{||a_1||_{p_1}} \cdot \frac{|a_{2i}|}{||a_2||_{p_2}} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1.$$

Ou seja,

$$\sum_i \frac{|a_{1i}|}{||a_1||_{p_1}} \cdot \frac{|a_{2i}|}{||a_2||_{p_2}} \leq 1.$$

Consequentemente,

$$\sum_i |a_{1i}.a_{2i}| \leq ||a_1||_{p_1} . ||a_2||_{p_2} .$$

Logo,

$$||a_1.a_2||_r \leq ||a_1||_{p_1} . ||a_2||_{p_2} .$$

Agora, suponha que $p_1 = \infty$. Note que,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{\infty} |a_{1i} a_{2i}| \right| &\leq \sup_m \sum_{i=1}^{m} |a_{1i} a_{2i}| \leq \sup_i |a_{1i}| \sup_m \sum_{i=1}^{m} |a_{2i}| \\ &\leq \sup_i |a_{1i}| . \sup_m \left(\sum_{i=1}^{m} |a_{2i}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= \sup_i |a_{1i}| . \left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{2i}|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &= ||a_1||_{\infty} . ||a_2||_{p_2} . \end{aligned}$$

Agora suponhamos $N = 2$ e $r > 1$. Lembrando que $1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2}$ temos

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{1i} a_{2i}|^r \right) = |||a_1 a_2|^r||_1 \leq |||a_1|^r||_{\frac{p_1}{r}} . |||a_2|^r||_{\frac{p_2}{r}} .$$

Ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{1i} a_{2i}|^r \right) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|a_{1i}|^r)^{\frac{p_1}{r}} \right)^{\frac{r}{p_1}} . \left(\sum_{i=1}^{\infty} (|a_{2i}|^r)^{\frac{p_2}{r}} \right)^{\frac{r}{p_2}} .$$

Isto significa mais precisamente que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{1i}a_{2i}|^{r}\right) \leq \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{1i}|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}\right]^{r} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{2i}|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}\right]^{r}$$
$$= ||a_1||_{p_1}^{r} \cdot ||a_2||_{p_2}^{r} .$$

E daí, obtemos

$$||a_1a_2||_r \leq ||a_1||_{p_1} \cdot ||a_2||_{p_2} .$$

Suponhamos então que o resultado seja válido para $N-1$. Vamos mostrar que é válido para N. De fato, note que se $p_N = \infty$, sabemos que

$$|a_N| \leq \sup_N |a_N| = ||a_N||_\infty .$$

E daí, pela hipótese de indução, temos

$$\begin{aligned} ||a_1 \cdots a_N||_r &= ||(a_1 \cdots a_{N-1}) . a_N||_r \leq ||a_1 \cdots a_{N-1}||_r \cdot ||a_N||_\infty \\ &\overset{\text{HI}}{\leq} ||a_1||_{p_1} \cdots ||a_{N-1}||_{p_{N-1}} \cdot ||a_N||_{p_N} . \end{aligned}$$

Por outro lado, se $p_N < \infty$, note que $p = \frac{p_N}{(p_N - r)}$ e $q = \frac{p_N}{r}$ são expoentes conjugados de Hölder no intervalo $(0, \infty)$. Então, aplicando a Desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{1}{r} = \frac{1}{rp} + \frac{1}{rq}$ e usando a hipótese de indução com

$$\frac{1}{rp} = \left(\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{N-1}}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} ||a_1 \cdots a_N||_r &= ||(a_1 \cdots a_{N-1}) . a_N||_r \leq ||a_1 \cdots a_{N-1}||_{rp} \cdot ||a_N||_{rq} \\ &\leq ||a_1||_{p_1} \cdots ||a_{N-1}||_{p_{N-1}} \cdot ||a_N||_{p_N} . \end{aligned}$$

Note que $rq = p_N$. Portanto,

$$||a_1 \cdots a_N||_r \leq ||a_1||_{p_1} \cdots ||a_N||_{p_N} .$$

□

Exibiremos agora o principal resultado deste capítulo, a Desigualdade de Hölder com normas mistas em espaços de sequências. A título de informação, poderíamos fazer a demonstração do resultado utilizando o espaço das funções mensuráveis, com algumas pequenas adaptações.

Teorema 1.2. ***(Desigualdade de Hölder com normas mistas em espaços ℓ_p)*** *Sejam m, n, N inteiros positivos, $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_m) \in (0, \infty]^m$, $\mathbf{p}(1) = (p_1(1), \ldots, p_m(1))$, $\cdots, \mathbf{p}(N) = (p_1(N), \ldots, p_m(N)) \in (0, \infty]^m$ tais que*

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{p_j(1)} + \cdots + \frac{1}{p_j(N)}, \text{ para } j = 1, \ldots, m. \tag{1.1}$$

Considere também $\mathbf{a}(k) = (a(k)_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m} \in \ell_{\mathbf{p}(k)}$, $k = 1, \ldots, N$ matrizes escalares. Então, $\mathbf{a}(1) \cdots \mathbf{a}(N) \in \ell_{\mathbf{r}}$, e além disso,

$$||\mathbf{a}(1) \cdots \mathbf{a}(N)||_{\mathbf{r}} \leq ||\mathbf{a}(1)||_{\mathbf{p}(1)} \cdots ||\mathbf{a}(N)||_{\mathbf{p}(N)}.$$

Em particular, se cada $\mathbf{p}(k) \in (0, \infty)$, temos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} \left| a(1)_{\mathbf{i}} \cdots a(N)_{\mathbf{i}} \right|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \prod_{k=1}^{N} \left[\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |a(k)_{\mathbf{i}}|^{p_m(k)} \right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}} \cdots \right)^{\frac{p_1(k)}{p_2(k)}} \right)^{\frac{1}{p_1(k)}} \right].$$

Demonstração. Procederemos usando indução sobre m. Por simplicidade de notação, consideraremos apenas o caso em que $\mathbf{p}(k) \in (0, \infty)^m$, para $k = 1, \ldots, N$. Note que para $m = 1$, temos a versão clássica de Hölder generalizada. Analisemos então o caso $m = 2$. Sejam $\mathbf{a}(k) = \left(a(k)_{i_1, i_2} \right)_{i_1, i_2 \in \mathbb{N}} \in \ell_{p_1(k), p_2(k)}$ matrizes escalares de múltiplos índices, com $r = (r_1, r_2)$, $p(k) = (p_1(k), p_2(k)) \in (0, \infty)^2$, $k = 1, \ldots, N$ e

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1(1)} + \cdots + \frac{1}{p_1(N)} \tag{1.2}$$
$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{p_2(1)} + \cdots + \frac{1}{p_2(N)} \tag{1.3}$$

Fixado i_1, por hipótese, $\left(a(1)_{i_1, i_2} \right)_{i_2=1}^{\infty} \in \ell_{p_2(1)}, \cdots, \left(a(N)_{i_1, i_2} \right)_{i_2=1}^{\infty} \in \ell_{p_2(N)}$. Por 1.3 e pela Desigualdade clássica de Hölder segue que $\left(a(1)_{i_1, i_2} \cdots a(N)_{i_1, i_2} \right)_{i_2=1}^{\infty} \in \ell_{r_2}$ e, além disso,

$$\left|\left| a(1)_{i_1, i_2} \cdots a(N)_{i_1, i_2} \right|\right|_{r_2} \leq \left|\left| a(1)_{i_1, i_2} \right|\right|_{p_2(1)} \cdots \left|\left| a(N)_{i_1, i_2} \right|\right|_{p_2(N)}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(1)_{i_1,i_2}\cdots a(N)_{i_1,i_2}\right|^{r_2}\right)^{\frac{1}{r_2}}\\ &\leq\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(1)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(1)}\right)^{\frac{1}{p_2(1)}}\cdots\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(N)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(N)}\right)^{\frac{1}{p_2(N)}}.\end{aligned}$$

Com isso, definamos $\alpha_{i_1}(k)=\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(k)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(k)}\right)^{\frac{1}{p_2(k)}}\overset{\text{def}}{=}\left|\left|a(k)_{i_1,i_2}\right|\right|_{p_2(k)}$ para todo $k=1,\ldots,N$. Por hipótese, $\mathbf{a}(k)\in\ell_{(p_1(k),p_2(k))}$. Consequentemente, $(\alpha_{i_1}(k))_{i_1=1}^{\infty}\in\ell_{p_1(k)}$, $k=1,\ldots,N$. Elevando ambos os membros da desigualdade a r_1, somando em i_1 e em seguida elevando ambos os membros a $\frac{1}{r_1}$ obtemos,

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(1)_{i_1,i_2}\cdots a(N)_{i_1,i_2}\right|^{r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}\\ &\leq\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(1)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(1)}\right)^{\frac{r_1}{p_2(1)}}\cdots\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(N)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(N)}\right)^{\frac{r_1}{p_2(N)}}\right]\right)^{\frac{1}{r_1}}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}||a(1)\cdots a(N)||_{(r_1,r_2)}&\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(1)_{i_1,i_2}\cdots a(N)_{i_1,i_2}\right|^{r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}\\ &\leq\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a(k)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(k)}\right)^{\frac{1}{p_2(k)}}\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}\\ &=\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{N}\alpha_{i_1}(k)\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}\\ &=\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\alpha_{i_1}(1)\cdots\alpha_{i_1}(N)\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}.\end{aligned}$$

Uma vez que cada sequência $(\alpha_{i_1}(k))_{i_1=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_{p_1(k)}$, para todo $k=1,\ldots,N$, usando 1.2 temos,

$$\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\alpha_{i_1}(1)\cdots\alpha_{i_1}(N)\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}\leq\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left|\alpha_{i_1}(1)\right|^{p_1(1)}\right)^{\frac{1}{p_1(1)}}\cdots\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left|\alpha_{i_1}(N)\right|^{p_1(N)}\right)^{\frac{1}{p_1(N)}}.$$

Logo,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a\left(1\right)_{i_1,i_2}\cdots a\left(N\right)_{i_1,i_2}\right|^{r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\alpha_{i_1}\left(1\right)\cdots\alpha_{i_1}\left(N\right)\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}$$

Por conseguinte,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a\left(1\right)_{i_1,i_2}\cdots a\left(N\right)_{i_1,i_2}\right|^{r_2}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left|a\left(k\right)_{i_1,i_2}\right|^{p_2(k)}\right)^{\frac{p_1(k)}{p_2(k)}}\right)^{\frac{1}{p_1(k)}}.$$

Pela definição de norma mista, concluímos que

$$\left|\left|\mathbf{a}\left(1\right)\cdots\mathbf{a}\left(N\right)\right|\right|_{(r_1,r_2)} \leq \left|\left|\mathbf{a}\left(1\right)\right|\right|_{(p_1(1),p_2(1))}\cdots\left|\left|\mathbf{a}\left(N\right)\right|\right|_{(p_1(N),p_2(N))}.$$

Consequentemente,

$$\left|\left|\mathbf{a}\left(1\right)\cdots\mathbf{a}\left(N\right)\right|\right|_{\mathbf{r}} \leq \left|\left|\mathbf{a}\left(1\right)\right|\right|_{\mathbf{p}(1)}\cdots\left|\left|\mathbf{a}\left(N\right)\right|\right|_{\mathbf{p}(N)}$$

como desejávamos. Dadas $\mathbf{a}\left(1\right) \in \ell_{\mathbf{P}(1)}, \cdots, \mathbf{a}\left(N\right) \in \ell_{\mathbf{p}(N)}$, suponhamos, por hipótese, que o resultado seja válido para $m-1$. Mostremos que o mesmo é válido para m. Fixado i_1, pela definição de norma mista em espaços $\ell_{\mathbf{p}}$ garantimos que,

$$\left(a_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\left(k\right)\right)_{i_2,\ldots,i_m=1}^{\infty} \in \ell_{(p_2(k),\ldots,p_m(k))},\ \forall\ k=1,\ldots,N.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder com (1.1), pela hipótese de indução nos é assegurado que

$$\left(a\left(1\right)_{\mathbf{i}}\cdots a\left(N\right)_{\mathbf{i}}\right)_{i_2,\ldots,i_m=1}^{\infty} \in \ell_{(r_2,\ldots,r_m)}.$$

Além disso,

$$\left|\left|\mathbf{a}\left(1\right)\cdots\mathbf{a}\left(N\right)\right|\right|_{(r_2,\ldots,r_m)} \leq \prod_{k=1}^{N}\left|\left|\mathbf{a}\left(k\right)\right|\right|_{(p_2(k),\ldots,p_m(k))}.$$

Ou seja,

$$\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|a(1)_{\mathbf{i}}\cdots a(N)_{\mathbf{i}}\right|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}}\right)^{\frac{1}{r_2}}$$
$$\leq\prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|a(k)_{\mathbf{i}}\right|^{p_m(k)}\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}}\right)^{\frac{1}{p_2(k)}}.$$

Com isso, para cada i_1 fixo, considere, para todo $k=1,\ldots,N$

$$\beta_{i_1}(k)=\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|a(k)_{\mathbf{i}}\right|^{p_m(k)}\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}}\right)^{\frac{1}{p_2(k)}}\overset{\text{def}}{=}\left|\left|a(k)_{\mathbf{i}}\right|\right|_{(p_2(k),\ldots,p_m(k))}.$$

Como consequência, obtemos

$$\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|a(1)_{\mathbf{i}}\cdots a(N)_{\mathbf{i}}\right|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}}\right)^{\frac{1}{r_2}}\leq\beta_{i_1}(1)\cdots\beta_{i_1}(N).$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a r_1, somando em i_1, e em seguida elevando a $\frac{1}{r_1}$ temos,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|a(1)_{\mathbf{i}}\cdots a(N)_{\mathbf{i}}\right|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\prod_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|a(k)_{\mathbf{i}}\right|^{p_m(k)}\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}}\right)^{\frac{1}{p_2(k)}}\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}$$
$$=\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{N}\beta_{i_1}(k)\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}}\overset{\text{def}}{=}\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left|\beta_{i_1}(1)\cdots\beta_{i_1}(N)\right|^{r_1}\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Por hipótese, cada sequência $\left(\beta_{i_1}(k)\right)_{i_1=1}^{\infty}$ pertence a $\ell_{p_1(k)}$, para todo $k=1,\ldots,N$.

Então, aplicando a Desigualdade de Hölder no segundo membro usando 1.2 obtemos:

$$\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left[\prod_{k=1}^{N}\beta_{i_1}(k)\right]^{r_1}\right]^{\frac{1}{r_1}} \leq \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}|\beta_{i_1}(1)|^{p_1(1)}\right)^{\frac{1}{p_1(1)}} \cdots \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}|\beta_{i_1}(N)|^{p_1(N)}\right)^{\frac{1}{p_1(N)}}.$$

Isto significa mais precisamente que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|a(1)_{\mathbf{i}}\cdots a(N)_{\mathbf{i}}|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}}\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq \prod_{k=1}^{N}\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|a(k)_{\mathbf{i}}|^{p_m(k)}\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}}\right)^{\frac{p_1(k)}{p_2(k)}}\right)^{\frac{1}{p_1(k)}}.
\end{aligned}$$

Pela definição de norma mista segue que

$$\begin{aligned}
||\mathbf{a}(1)\cdots\mathbf{a}(N)||_{\mathbf{r}} &= ||\mathbf{a}(1)\cdots\mathbf{a}(N)||_{(r_1,\ldots,r_m)} \\
&\leq ||\mathbf{a}(1)||_{(p_1(1),\ldots,p_m(1))}\cdots||\mathbf{a}(N)||_{(p_1(N),\ldots,p_m(N))} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} ||\mathbf{a}(1)||_{\mathbf{p}(1)}\cdots||\mathbf{a}(N)||_{\mathbf{p}(N)}.
\end{aligned}$$

□

Utilizando a desigualdade acima, podemos obter uma variação dela, denominada de Desigualdade de Hölder interpolativa com expoentes múltiplos. Relembrando a definição de matrizes de múltiplos índices, dado $\theta > 0$, definimos $\mathbf{a}^{\theta} = \left(a_{\mathbf{i}}^{\theta}\right)_{\mathbf{i}\in\mathbb{N}^m}$. Dado $\mathbf{q} = (q_1,\ldots,q_m) \in (0,\infty]^m$ é fácil ver que

$$\left|\left|\mathbf{a}^{\theta}\right|\right|_{\frac{\mathbf{q}}{\theta}} = ||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}}^{\theta}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left|\left|\mathbf{a}^{\theta}\right|\right|_{\frac{\mathbf{q}}{\theta}} &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left(\left|a_{\mathbf{i}}^{\theta}\right|\right)^{\frac{q_m}{\theta}}\right)^{\frac{q_{m-1}}{\theta}\cdot\frac{\theta}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{\theta}\cdot\frac{\theta}{q_2}}\right)^{\frac{\theta}{q_1}} \\
&= \left[\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|a_{\mathbf{i}}|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\right]^{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} ||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}}^{\theta},
\end{aligned}$$

onde $\frac{\mathbf{q}}{\theta} = \left(\frac{q_1}{\theta}, \ldots, \frac{q_m}{\theta}\right)$.

Definição 1.3.1. Seja E espaço vetorial e X subconjunto de E. Dados $x_1, \ldots, x_n \in X$, o conjunto $C(X)$ formado por todas as combinações convexas $t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$, com $t_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ chama-se envoltória convexa de X.

É fácil ver que $C(X)$ é um subconjunto convexo de E. Além disso, $C(X)$ é o menor subconjunto convexo de E que contém X.

Corolário 1.3. (Desigualdade de Hölder interpolativa com expoentes múltiplos). Sejam m, n, N inteiros positivos e $\mathbf{q}, \mathbf{q}(1), \ldots, \mathbf{q}(N) \in (0, \infty]^m$ tais que $\left(\frac{1}{q_1}, \ldots, \frac{1}{q_m}\right)$ pertencem a envoltória convexa de $\left(\frac{1}{q_1(k)}, \ldots, \frac{1}{q_m(k)}\right)$, com $k = 1, \ldots, N$. Então para qualquer matriz $\mathbf{a} = (a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathbb{N}^m}$,

$$||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}} \leq \prod_{k=1}^{N} ||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k},$$

onde os θ_k são as coordenadas de $\left(\frac{1}{q_1(k)}, \ldots, \frac{1}{q_m(k)}\right)$ na envoltória convexa.

Ou seja,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|a_{\mathbf{i}}|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|a_{\mathbf{i}}|^{q_m(k)}\right)^{\frac{q_{m-1}(k)}{q_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}}\right)^{\frac{1}{q_1(k)}}\right]^{\theta_k},$$

Demonstração. Para $j = 1, \ldots, m$ temos,

$$\frac{1}{q_j} = \frac{\theta_1}{q_j(1)} + \cdots + \frac{\theta_N}{q_j(N)} = \frac{1}{\frac{q_j(1)}{\theta_1}} + \cdots + \frac{1}{\frac{q_j(N)}{\theta_N}}.$$

Uma vez que $\left|\left|\mathbf{a}^{\theta_k}\right|\right|_{\frac{\mathbf{q}(k)}{\theta_k}} = ||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k}$, aplicando a Desigualdade de Hölder com normas mistas em espaços $\ell_{\mathbf{p}}$, obtemos

$$||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}} = \left|\left|\mathbf{a}^{\theta_1+\cdots+\theta_N}\right|\right|_{\mathbf{q}} = \left|\left|\prod_{k=1}^{N}\mathbf{a}^{\theta_k}\right|\right|_{\mathbf{q}} \leq \prod_{k=1}^{N}\left|\left|\mathbf{a}^{\theta_k}\right|\right|_{\frac{\mathbf{q}(k)}{\theta_k}} = \prod_{k=1}^{N}||\mathbf{a}||_{\mathbf{q}(k)}^{\theta_k}.$$

□

No Capítulo 3 perceberemos com mais nitidez a importância deste resultado em algumas aplicações, dentre elas, a Desigualdade de Bohnenblust-Hille.

Capítulo 2

Operadores multilineares múltiplo somantes

2.1 Operadores absolutamente somantes

O objetivo deste capítulo é discorrer sobre os principais resultados concernentes a teoria multilinear dos operadores absolutamente somantes. Essa teoria teve início com Grothendieck, na década de 50 ([23], 1953), mas foi verdadeiramente compreendida apenas na década de 60 com contribuições de Lindestrauss, Pelczynski, Pietsch, dentre outros.

Começaremos com alguns resultados clássicos sobre somabilidade e alguns espaços de sequências, ferramentas cruciais para se estudar os referidos operadores. Mencionaremos também os teoremas de Grothendieck e Dvoretzky-Rogers. Em sequência, exibiremos as ramificações dos operadores absolutamente somantes, como os operadores $p-$somantes, $(q,p)-$somantes e múltiplos somantes.

Definição 2.1.1. Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em E é dita ser **fortemente p-somável** quando a respectiva sequência de escalares $(||x_n||)_n$ estiver em ℓ_p. Denotamos por $\ell_p(E)$ o conjunto formado pelas sequências fortemente p-somáveis, isto é,

$$\ell_p(E) = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}}; (x_n) \text{ é fortemente } p\text{-somável}\}.$$

Um fato conhecido é que este conjunto munido com as operações usuais torna-se um espaço vetorial, equipado com a norma definida por

$$||(x_n)||_p \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leq p < \infty \text{ e } ||(x_n)||_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} ||x_n||\,, \text{ caso } p = \infty.$$

Dos cursos de Análise Funcional, aprendemos que o espaço das sequências ℓ_p munido com a sua norma usual é um espaço de Banach. De modo natural, isso nos levaria a pensar se essa propriedade de completude poderia ser herdada por esses novos espaços.

Proposição 2.1. $\left(\ell_p(E); ||.||_p\right)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Trabalharemos com o caso $1 \leq p < \infty$, pois, por meio de adaptações é possível lograr êxito com o caso $p = \infty$. Considere então $(x^n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$, onde $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p(E)$. Dado $\varepsilon > 0$, por definição, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que pra k, l suficientemente grandes, obtemos

$$\varepsilon > \left|\left|x^k - x^l\right|\right|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left|x_n^k - x_n^l\right|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left|\left|x_n^k - x_n^l\right|\right|^p.$$

E daí, para cada natural n fixo, segue que $\left(x_n^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em E. Como E é Banach, existe $x_n \in E$ tal que $x_n^k \to x_n$, quando $k \to \infty$. Como l na expressão acima é arbitrário, podemos fazer $l \to \infty$. Por conseguinte, obtemos

$$\varepsilon > \left|\left|x^k - x\right|\right|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left|x_n^k - x_n\right|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq \left|\left|x_n^k - x_n\right|\right|^p,$$

com $x = (x_n)_n$. Isto significa mais precisamente que $x - x^k \in \ell_p(E)$ e $\lim x^k \overset{k\to\infty}{=} x$. Sendo $\ell_p(E)$ um espaço vetorial, segue que $x = x^k + \left(x - x^k\right) \in \ell_p(E)$. Consequentemente, obtemos a completude almejada. □

Outro conceito importante na teoria é o de sequências fracamente somáveis.

Definição 2.1.2. Sejam E um espaço de Banach e $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que uma sequência $(x_n) \in E$ é **fracamente p-somável** se $(\varphi(x_n))_n \in \ell_p$, para todo funcional linear contínuo $\varphi \in E'$. Denominamos $\ell_p^w(E)$ o conjunto formado por todas as sequências fracamente p-somáveis em E. Ou seja,

$$\ell_p^w(E) = \{(x_n) \in E^{\mathbb{N}}; (x_n) \text{ é fracamente } p\text{-somável}\}.$$

Além disso, este conjunto munido com as operações usuais também torna-se um espaço vetorial, e sua norma é definida por

$$||(x_n)||_{p,w} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \text{ para } 1 \leq p < \infty$$

e

$$||(x_n)||_{p,w} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(x_n)||_\infty \text{ para } p = \infty.$$

Antes de verificarmos que tal aplicação define uma norma em $\ell_p^w(E)$, o primeiro passo a ser dado é verificar se o supremo acima é de fato finito. Com isso, necessitamos do auxílio do Teorema do Gráfico Fechado. Com efeito, dado $x = (x_n) \in \ell_p^w(E)$, considere o operador $\Psi_x : E' \longrightarrow \ell_p$ definido por $\Psi_x(\varphi) = (\varphi(x_n))_n$. Note que Ψ_x está bem definida e é claramente linear. Seja então $(\varphi_n, \Psi_x(\varphi_n)) \longrightarrow (\varphi, y)$, onde $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ e $\Psi_x(\varphi_n) \longrightarrow y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pela continuidade de φ, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_k(x_n) \longrightarrow \varphi(x_n)$ e $\varphi_k(x_n) \longrightarrow y_n$. Pela unicidade do limite, asseguramos que $\Psi_x(\varphi) = (\varphi(x_n)) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = y$, ou seja, Ψ_x possui gráfico fechado. Como E' e ℓ_p são espaços de Banach, pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que Ψ_x é contínuo. Consequentemente,

$$||x||_{p,w} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||(\varphi(x_n))_n||_p = \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\Psi_x(\varphi)|| \stackrel{\text{def}}{=} ||\Psi_x|| < \infty.$$

Concluímos então que o supremo é finito.

Com a finitude obtida, nos resta apenas verificar que $||.||_{p,w}$ define uma norma em $\ell_p(E)$. De fato, considere $x = (x_n) \in \ell_p^w(E)$. Note que, $||(x_n)||_{p,w} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||(\varphi(x_n))_n||_p$. Se $||(x_n)||_{p,w} = 0 \Longrightarrow \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||(\varphi(x_n))_n||_p = 0$. Consequentemente, $(\varphi(x_n)) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in E'$. E daí, pelo Teorema de Hahn-Banach $x_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo, $x = 0$.

Além disso, dadas (x_n), $(y_n) \in \ell_p^w(E)$ e $\varphi \in B_{E'}$, garantimos que $||\varphi(x_n + y_n)||_p = ||\varphi(x_n) + \varphi(y_n)||_p$. Utilizando a desigualdade triangular,

$$||\varphi(x_n + y_n)||_p \le ||\varphi(x_n)||_p + ||\varphi(y_n)||_p \le \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(x_n)||_p + \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(y_n)||_p.$$

Logo,

$$\sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(x_n + y_n)||_p \le \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(x_n)||_p + \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(y_n)||_p.$$

Por definição, $||(x_n + y_n)||_{p,w} \le ||(x_n)||_{p,w} + ||(y_n)||_{p,w}$. Por fim, consideremos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x = (x_n) \in \ell_p^w(E)$. Assim,

$$\begin{aligned} ||(\lambda x_n)||_{p,w} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(\lambda x_n)||_p = \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\lambda\varphi(x_n)||_p \\ &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\lambda| . ||\varphi(x_n)||_p = |\lambda| . \sup_{\varphi\in B_{E'}} ||\varphi(x_n)||_p \\ &= |\lambda| . ||(x_n)||_{p,w}. \end{aligned}$$

Portanto, $||.||_{p,w}$ define uma norma em $\ell_p^w(E)$.

Proposição 2.2. $\left(\ell_p^w(E), ||.||_{p,w}\right)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Inicialmente seja $1 \le p < \infty$. Considere $(x^n)_n$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para k, l suficientemente grandes com $k, l \geq k_0$ temos:

$$\varepsilon > \left|\left|x^k - x^l\right|\right|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\left|\varphi\left(x_n^k - x_n^l\right)\right|\right|_p \geq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n^l\right)\right| \overset{\text{H.Banach}}{=} \left|\left|x_n^k - x_n^l\right|\right|.$$

Em outras palavras, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixo, $\left(x_n^k\right)_k$ é de Cauchy em E. Como este é Banach, existe $x_n \in E$ tal que $x_n^k \to x_n$, quando $k \to \infty$. Seja $x = (x_n)$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p^w(E)$. De fato, dado $1 \leq p < \infty$, para cada $\varphi \in B_{E'}$ e k, l grandes temos:

$$\varepsilon^p > \left|\left|x^k - x^l\right|\right|_{p,w}^p = \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\left|\varphi\left(x_n^k - x_n^l\right)_n\right|\right|_p\right)^p \geq \sum_{n=1}^{N} \left|\varphi\left(x_n^k - x_n^l\right)\right|^p.$$

Fazendo $k \to \infty$, $\sum_{n=1}^{N} \left|\varphi\left(x_n - x_n^l\right)\right|^p \leq \varepsilon^p$, $\forall \varphi \in B_{E'}$, isto é, $\left|\left|x^k - x\right|\right|_{p,w} \leq \varepsilon$. Em decorrência disso, $x^k \overset{||\cdot||_{p,w}}{\to} x$ e $x \in \ell_p^w(E)$, uma vez que $x = x^k + \left(x - x^k\right)$, onde ambas parcelas estão em $\ell_p^w(E)$. $\square$

O caso $p = \infty$ nos revela uma peculiaridade. Neste caso, com o auxílio do Teorema de Hahn Banach (forma analítica), é possível mostrar que $\ell_\infty(E) = \ell_\infty^w(E)$, E espaço de Banach. Com efeito, seja $(x_n)_n$ sequência limitada em E. Note que,

$$||(x_n)_n||_\infty \overset{\text{def}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} ||x_n|| \overset{\text{H-Banach}}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)|\right) = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x_n)| \overset{\text{def}}{=} ||(x_n)_n||_{\infty,w}.$$

Com isso, concluímos que $\ell_\infty(E) \subseteq \ell_\infty^w(E)$. Reciprocamente, obtemos o resultado. Observe que a troca do supremo é permitida em virtude do Teorema de Hahn-Banach (veja [14, Corollary 1.3]). Para cada $x_n \in E$, o resultado nos assegura a existência de um funcional $\varphi_{x_n} \in B_{E'}$ tal que $\varphi_{x_n}(x_n) = ||x_n||$. Com isso,

$$||x_n|| = \varphi_{x_n}(x_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_{x_n}(x_n)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x_n)|\right).$$

Logo,

$$\sup_n \; ||x_n|| = \sup_n \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)|\right) \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi(x_n)|\right).$$

Analogamente,

$$\varphi_{x_n}(x_n) = ||x_n|| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} ||x_n|| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_n)|\right).$$

Então,

$$\sup_{\varphi\in B_{E'}}|\varphi_{x_n}(x_n)| = \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}|\varphi(x_n)|\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sup_{\varphi\in B_{E'}}|\varphi(x_n)|\right),$$

e daí temos a igualdade.

Com os espaços conhecidos e bem definidos, uma relação interessante entre eles é que $\ell_p(E)$ é um subespaço vetorial do $\ell_p^w(E)$, pois, dado $x = (x_n)_n \in \ell_p(E)$ e $\varphi \in E'$ obtemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}(||\varphi||\,.\,||x_n||)^p \leq ||\varphi||^p\,.\sum_{n=1}^{\infty}||x_n||^p < \infty.$$

Consequentemente, $(\varphi(x_n))_n \in \ell_p$, $\forall\varphi \in E' \Longrightarrow x = (x_n)_n \in \ell_p^w(E)$. Logo, $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$.

Neste mesmo contexto, destacamos também os seguintes espaços:

$$c_0^w(E) = \{(x_n) \in E; \lim_{n\to\infty}\ \varphi(x_n) = 0, \forall\varphi \in E'\}$$
$$c_0(E) = \{(x_n) \in E; \lim_{n\to\infty}\ ||x_n|| = 0\}.$$

Denominamos $c_0^w(E)$ e $c_0(E)$ o espaço formado pelas sequências fracamente nulas e o espaço formado pelas sequências fortemente nulas respectivamente, do espaço de Banach E. Veremos mais tarde o teorema fraco de Dvoretzky-Rogers, o qual assegura que quando $1 \leq p < \infty$, nós temos $\ell_p^w(E) = \ell_p(E)$ se, e somente se, $\dim E < \infty$. Outro espaço igualmente importante é denotado por

$$\ell_p^u(E) \overset{\text{def}}{=} \left\{(x_n)_n \in \ell_p^w(E);\ \lim_{k\to\infty}\left|\left|(x_n)_{n>k}\right|\right| = 0\right\}, \text{ para } p \in [1,\infty).$$

Ratificando o que mencionamos no início deste capítulo, um dos grandes responsáveis pelo sucesso da teoria dos espaços de Banach foi Alexander Grothendieck com a publicação do [23] em 1953. Trabalho de difícil compreensão e leitura, com conceitos técnicos e abstratos sobre normas tensoriais, ideais de operadores, operadores absolutamente somantes, que aos poucos foram sendo lapidados por J. Lindestrauss e A. Pelczynski em 1968, tornando-os mais acessíveis e palpáveis para a comunidade científica. O principal resultado do Résumé ([23]) dito pelo próprio Grothendieck, é chamado na obra de Teorema Fundamental da teoria métrica de produtos tensoriais, hoje conhecida como Desigualdade de Grothendieck, marcada pelo misticismo da constante K_G (homenagem a Grothendieck), a qual não se sabe até hoje seu valor ótimo, tanto no caso real quanto no caso complexo. Outro resultado importante é o Teorema de Grothendieck, que de certa forma marcou o início do estudo dos operadores absolutamente somantes, talvez não como conhecemos hoje, mas suas ideias foram com certeza imprescindíveis.

Recordemos que se E e F são espaços de Banach, denotamos por $\mathcal{L}(E,F)$ o espaço vetorial formado por todas aplicações lineares contínuas $T : E \longrightarrow F$ munido com a norma do supremo,

$$||T|| = \sup_{x \in B_E} ||Tx|| \,.$$

Definição 2.1.3. Sejam E e F espaços de Banach. Um operador $T \in \mathcal{L}(E,F)$ é absolutamente somante se T transforma sequências fracamente somáveis em sequências absolutamente somáveis, ou seja,

$$(T(x_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_1(F) \text{ sempre que } (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E) \,.$$

Decorre da definição, que o operador absolutamente somante em certo sentido melhora a convergência das séries.

Exemplo 2.1. Operadores de posto finito são absolutamente somantes. Para detalhes veja [18, prop.2.3]

Exemplo 2.2. Considere a sequência $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$. Note que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ é fracamente somável em ℓ_∞. Entretanto, como $||e_j|| = 1$, para todo j, é imediato que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ não é absolutamente somável em ℓ_∞. Por conseguinte, o operador identidade $i : \ell_\infty \longrightarrow \ell_\infty$ é linear e contínuo, mas não é absolutamente somante.

Teorema 2.3. *(Desigualdade de Grothendieck) Existe uma constante positiva K_G tal que, para todo espaço de Hilbert H, todo $m \in \mathbb{N}$, toda matriz quadrada de escalares $(a_{ij})_{m \times m}$ e quaisquer vetores $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m \in B_H$, é verdade que*

$$\left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leq K_G \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i| \ \ , |t_j| \leq 1 \right\} .$$

Para detalhes da demonstração, recomendamos [13, Teor.10.2.2].

Teorema 2.4. *(Teorema de Grothendieck) Todo operador linear contínuo $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ é absolutamente somante.*

Novamente, recomendamos [13, Teor.10.2.6].

O próximo teorema nos permite caracterizar espaços de Banach com dimensão infinita por meio de séries incondicionalmente convergentes que não são absolutamente convergentes. A origem do teorema está atrelada ao problema presente no famoso “Scottish Book” ([32]), proposto por Mazur e Orlicz. Em 1950, A. Dvoretsky and C.A.

Rogers responderam a questão, que já havia tido um avanço importante uns três anos antes com um artigo de MacPhail [28].

Teorema 2.5. *(Dvoretzky-Rogers) Seja E espaço de Banach de dimensão infinita. Dada qualquer sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ existe uma série incondicionalmente convergente $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em E tal que $||x_n|| = |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \ell_1$, então a série associada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente mas não-absolutamente convergente.*

No âmbito da teoria de operadores absolutamente somantes, é conveniente utilizar a seguinte versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers:

Teorema 2.6. *(Teorema fraco de Dvoretzky-Rogers) Seja $1 \leq p < \infty$. Todo espaço de Banach E de dimensão infinta possui uma sequência fracamente p-somável que não é fortemente p-somável.*

2.2 Operadores absolutamente p-somantes

Definição 2.2.1. Seja $1 \leq p < \infty$ e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach. Dizemos que T é absolutamente p-somante se existe uma constante $c \geq 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_m \in E$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} ||Tx_i||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c. \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} : \varphi \in B_{E'}\right\}.$$

A menor das constantes c que satisfaz a desigualdade acima denotamos por $\pi_p(T)$. Escrevemos $\prod_p(E,F)$ o conjunto formado por todos os operadores p-somantes de E em F.

É fácil verificar que $\prod_p(E;F)$ é um subspaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$ e que π_p define uma norma em $\prod_p(E,F)$. A proposição a seguir nos permite caracterizar os operadores p-somantes. Para tanto, consideremos o operador $\widehat{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p(F)$ dado por $\widehat{T}(x_n) = (T(x_n))_n$

Proposição 2.7. T é p-somante se e somente se $\widehat{T}\left(\ell_p^w(E)\right)$ está contido em $\ell_p(F)$. Neste caso, $\left|\left|\widehat{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p(F)\right|\right| = \pi_p(u)$.

O importante a destacar nessa proposição é o fato de que se $T : E \longrightarrow F$ é um operador p-somante, então ele induz um operador $\widehat{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p(F)$ definido por

$\widehat{T}(x_n) = (Tx_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfazendo $\pi_p(T) = \left\|\widehat{T}\right\|$. Em [15], os autores comentam que além da teoria dos espaços de Banach, os operadores p-somantes possuem forte impacto na teoria dos espaços nucleares e teoria das distribuições.

Teorema 2.8. *(Inclusão) Se $1 \leq p < q < \infty$, então $\prod_p(E;F) \subset \prod_q(E;F)$. Além disso, dado $T \in \prod_p(E;F)$ temos que $\pi_q(T) \leq \pi_p(T)$.*

Demonstração. Considere $T \in \prod_p(E;F)$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$ .Observe que se $\lambda_k = ||Tx_k||^{\frac{q}{p}-1}$ então obtemos $||Tx_k||^q = ||T(\lambda_k x_k)||^p$, pois,

$$||T(\lambda_k x_k)|| \overset{\text{def}}{=} |\lambda_k|\,||Tx_k|| = ||Tx_k||^{\frac{q}{p}-1}.\,||Tx_k|| = (||Tx_k||^q)^{\frac{1}{p}}.$$

Elevando ambos os membros a p, inferimos que $||T(\lambda_k x_k)||^p = ||Tx_k||^q$. Por hipótese, sendo T p-somante, garantimos que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ||Tx_k||^q\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} ||T(\lambda_k x_k)||^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T).\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^p |\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $q > p$, aplicando então a Desigualdade de Hölder com os expoentes $\frac{q}{p}$ e $\frac{q}{(q-p)}$ obtemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ||Tx_k||^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T).\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{\frac{qp}{(q-p)}}\right)^{\frac{(q-p)}{pq}}.\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^{n} (|\varphi(x_k)|^p)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{qp}}.$$

Por conseguinte,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ||Tx_k||^q\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(T).\left(\sum_{k=1}^{n} ||Tx_k||^q\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.\,||(x_k)_{k=1}^n||_{q,w}.$$

Reorganizando,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} ||Tx_k||^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_p(T).\,||(x_k)_{k=1}^n||_{q,w}.$$

Por definição, segue que T é q-somante. E daí, $\prod_p(E;F) \subset \prod_q(E;F)$. A outra conclusão é imediata. □

Outro personagem importante na teoria de operadores absolutamente somantes é A. Pietach. Uma de suas maiores contribuições na área é o Teorema de Dominação.

Teorema 2.9. *(Dominação de Pietsch, 1967) Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ é absolutamente p-somante se e somente se existe uma constante $C > 0$ e uma medida μ de probabilidade de Borel na bola unitária* *fechada do dual de E com a topologia fraca estrela,*$(B_{E^*}, \sigma(E^*, E))$*, tal que*

$$||T(x)|| \leq C \left(\int_{B_{E^*}} |\varphi(x)|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para detalhes da prova veja [36, Theorem 2.5].

2.3 Operadores absolutamente $(q; p)$-somantes

Com o passar dos anos, o estudo dos operadores absolutamente somantes foi ganhando destaque junto com a teoria dos espaços de Banach. A partir de então, novos conceitos foram sendo descobertos, o que é bem natural em se tratando de matemática, contribuindo gradativamente para o sucesso dessas novas linhas de pesquisa dentro da Análise Funcional. Neste contexto, nos anos 70 surge o conceito de tipo e cotipo de espaços de Banach, contemplados com os trabalhos de J. Hoffmann-Jorgensen, S. Kwapién, B. Maurey e G. Pisier. A motivação de Maurey para o uso de tais conceitos estava relacionada com problemas envolvendo fatoração de operadores lineares, enquanto que J. Hoffmann-Jorgensen incrementou estes elementos em seus estudos sobre teoria de probabilidade em espaços de Banach. Por outro lado, S. Kwapién e G. Pisier associaram tais conceitos em seus respectivos estudos sobre a geometria dos espaços de Banach. Sequencialmente, outras áreas foram fortemente influenciadas como teoria de ideiais de operadores, teoria de aplicações multilineares, teoria de produtos tensoriais topológicos e polinômios homogêneos em espaços de Banach. Para tanto, vamos relembrar um pouco algumas propriedades interessantes das funções de Rademacher.

Para cada inteiro positivo n, as funções de Rademacher $r_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ são formalmente definidas por

$$r_n(t) := sign(\sin 2^n \pi t).$$

A grande utilidade das funções de Rademacher são as propriedades de ortogonalidade. Se $0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ e $p_1, \ldots, p_k \geq 0$ são inteiros, então

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \cdots r_{n_k}^{p_k}(t) \; dt \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, \text{ se cada } p_j \text{ é par} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Uma consequência imediata desse fato é que as funções de Rademacher formam uma sequência ortonormal em $L_2[0,1]$. Além disso,

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2, \; \forall (a_n) \in \ell_2.$$

Definição 2.3.1. Dizemos que um espaço de Banach E possui **cotipo** $q \geq 2$ se existe uma constante $K \geq 0$ tal que, para todo inteiro positivo n e $x_1, \ldots, x_n$ em E, temos

$$\left(\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq K \; \left(\int_0^1 \left|\left| \sum_{i=1}^{n} r_i \left(t\right) x_i \right|\right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para o caso $q = \infty$, substituímos $\left(\sum_{i=1}^{n} ||x_i||^q \right)^{\frac{1}{q}}$ pelo $\max_{1 \leq k \leq n} ||x_k||$.

Denotamos por $C_q\left(E\right)$ o ínfimo de todas as constantes $K \geq 0$ que satisfazem a desigualdade acima e $\cot E$ o ínfimo dos cotipos assumidos por E, ou seja,

$$\cot E = \inf \left\{ \, 2 \leq q \leq \infty ; E \text{ possui cotipo } q \right\}.$$

Definição 2.3.2. Dizemos que um espaço de Banach E possui **tipo** p se existe uma constante $\theta \geq 0$ tal que para qualquer escolha finita de vetores $x_1, \ldots, x_n$ em E, temos

$$\left(\int_0^1 \left|\left| \sum_{k=1}^{n} r_k \left(t\right) x_k \right|\right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \theta . \left(\sum_{k=1}^{n} ||x_k||^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Se E possui **tipo** p, denotamos por $T_p\left(E\right)$ a menor constante θ que satisfaz a desigualdade acima e a chamamos de constante tipo p de E.

Definição 2.3.3. Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$ e E e F espaços de Banach. Dizemos que um operador linear contínuo $T : E \longrightarrow F$ é absolutamente (q, p)-somante, ou simplesmente $(q; p)$-somante, se $\left(T\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q\left(F\right)$ sempre que $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w\left(E\right)$. De maneira equivalente, dizemos que $T : E \longrightarrow F$ é $(q; p)$-somante se existe uma constante $C \geq 0$ tal que

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} ||T\left(x_n\right)||^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \; ||\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}||_{p,w} \text{ para toda } \left(x_n\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w\left(E\right).$$

O ínfimo de todas as constantes C para as quais a desigualdade acima é satisfeita define uma norma, que denotamos por $\pi_{q,p}\left(T\right)$. O caso em que $p = q$ escrevemos simplesmente $\pi_p\left(T\right)$. Denotamos ainda por $\prod_{q,p}\left(E; F\right)$ o conjunto formado por todos os operadores $(q; p)$-somantes de E em F. O que já é de se esperar é que $\left(\prod_{q,p}\left(E; F\right), \pi_{q,p}\left(T\right)\right)$ possui uma estrutura vetorial. E mais ainda, $\left(\prod_{q,p}\left(E; F\right), \pi_{q,p}\left(T\right)\right)$ é um espaço de Banach como constataremos depois.

Uma observação importante é que se $T : E \longrightarrow F$ é absolutamente $(q; p)$-somante, a aplicação induzida

$$\widehat{T}:\ell_p^w(E)\longrightarrow\ell_q(F)\text{, definida por }\widehat{T}(x_n)=(Tx_n)_{n=1}^{\infty}$$

é um operador linear bem definido e limitado, levando sequências fracamente p-somáveis de E em sequências fortemente q-somáveis de F(absolutamente q-somáveis). Além disso, $\prod_{q,p}(E;F)$ constitui um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E,F)$ e $||T||_{\pi_{(q;p)}}\overset{\text{def}}{=}\left|\left|\widehat{T}\right|\right|$ satisfazendo $||.||_{\mathcal{L}(E,F)}\leq||.||_{\pi_{(q;p)}}$. A proposição seguinte nos dá ferramentas para caracterizarmos os operadores absolutamente $(q;p)$-somantes.

Proposição 2.10. Seja $T:E\longrightarrow F$ operador linear limitado entre espaços de Banach. São equivalentes:

(a) T é absolutamente $(q;p)$-somante;

(b) Existe $K_1\geq 0$ tal que, para quaisquer $n\in\mathbb{N}$ e $x_1,\ldots,x_n\in E$,

$$\left(\sum_{k=1}^{n}||T(x_k)||^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq K_1.\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\varphi(x_k)|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

(c) Existe $K_2\geq 0$ tal que, para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_p^w(E)$,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}||T(x_n)||^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq K_2.\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

(d) Existe $K_3\geq 0$ tal que, para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_p^u(E)$,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}||T(x_n)||^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq K_3.\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

(e) $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}\in\ell_q(F)$, sempre que $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_p^w(E)$.

Para detalhes da demostração veja [4, Prop. 1.3].

Uma consequência imediata da proposição acima é que $||.||_{\mathcal{L}(E,F)}\leq||.||_{\pi_{(q;p)}}$. Vejamos a afirmação no corolário abaixo.

Corolário 2.11. Se $T\in\prod_{q,p}(E;F)$, então $||T||_{\mathcal{L}(E,F)}\leq||T||_{\pi_{q,p}}$.

Demonstração. De fato, se considerarmos $n=1$ no item (b) da proposição acima, obteremos:

$$||T||\overset{\text{def}}{=}\sup_{x\in B_E}||Tx||\leq\sup_{x\in B_E}||T||_{\pi_{q,p}}\sup_{\varphi\in B_{E'}}|\varphi(x)|=||T||_{\pi_{q,p}}\sup_{x\in B_E}\sup_{\varphi\in B_{E'}}|\varphi(x)|\overset{\text{H-Banach}}{=}||T||_{\pi_{q,p}}.$$

Portanto, $||T||_{\mathcal{L}(E,F)}\leq||T||_{\pi_{q,p}}$. □

Teorema 2.12. *$\left(\prod_{q,p}(E;F), \pi_{q,p}(T)\right)$ é Banach.*

Demonstração. Suponhamos que $1 \leq p \leq q < \infty$ e considere $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\left(\prod_{q,p}(E;F), \pi_{q,p}(T)\right)$. Como $||.||_{\mathcal{L}(E,F)} \leq ||.||_{\pi_{q,p}}$, asseguramos que $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(E,F)$. Como este é Banach, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Considere o operador $\widehat{T} : \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_q^w(F)$ definido por $\widehat{T}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right) = (Tx_n)_{n=1}^{\infty}$. Note que, $\widehat{T}$ está bem definido e é claramente linear, uma vez que T é linear. Além disso, é limitado, visto que

$$\left|\left|\widehat{T}\left((x_n)_{n=1}^{\infty}\right)\right|\right|_{q,w} = ||(Tx_n)_{n=1}^{\infty}||_{q,w} \overset{T \text{ é limitado}}{\leq} ||T|| \cdot ||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_{q,w} \leq ||T|| \cdot ||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_{p,w}$$

onde a última desigualdade é justificada pelo fato de que o operador inclusão $I : \ell_p \longrightarrow \ell_q$ linear e limitado satisfaz a condição $||.||_q \leq ||.||_p$ sempre que $p \leq q$. Pra cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o operador induzido $\widehat{T_n}$ oriundo da definição de operador $(q;p)$-somante. Como $||T_n||_{\pi_{q,p}} = \left|\left|\widehat{T_n}\right|\right|$, concluímos que $\left(\widehat{T_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}\left(\ell_p^w(E), \ell_q(F)\right)$. Sendo $\ell_q(F)$ Banach com sua norma usual, isso acarreta que $\mathcal{L}\left(\ell_p^w(E), \ell_q(F)\right)$ é Banach, e daí, a sequência $\left(\widehat{T_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $\varphi \in \mathcal{L}\left(\ell_p^w(E), \ell_q(F)\right)$. Dado $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, seja $(y_k)_{k=1}^{\infty} = \varphi(x_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$. Fixado $k \in \mathbb{N}$, observe que

$$||T_n x_k - y_k|| \leq ||(T_n x_k - y_k)_k||_p = \left|\left|\widehat{T_n}(x_k) - \varphi(x_k)\right|\right|_p \xrightarrow{n} 0. \text{ Logo, } \lim_{n\to\infty} T_n x_k = y_k.$$

Além disso, uma vez que $||T_n - T||_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0 \Longrightarrow \lim_n T_n x_k = T x_k$. Pela unicidade do limite, $y_k = Tx_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Decorre daí que $\widehat{T}(x_k)_k = (Tx_k)_k = (y_k)_k = \varphi(x_k)$, ou seja, $\widehat{T} = \varphi \in \mathcal{L}\left(\ell_p^w(E), \ell_q(F)\right)$, como desejávamos. □

Ressaltamos que todos os resultados vistos anteriormente sobre operadores absolutamente $(q;p)$-somantes, consideramos $q > p$, pois, veremos posteriormente que se $q < p$, o único operador $(q;p)$-somante é o operador identicamente nulo.

Com o conceito de operador absolutamente $(q;p)$-somante assimilado, alguns resultados clássicos da teoria surgem em consonância com o conceito de cotipo visto anteriormente, estabelecendo resultados de coincidência entre operadores lineares definidos em espaços de Banach.

Teorema 2.13. ***(Dubinsky - Pełczynski - Rosenthal - Maurey)*** *Seja F espaço de Banach com cotipo q , onde $2 \leq q < \infty$, e K um espaço de Hausdorff compacto.*

(a) Se $q = 2$, então $\mathcal{L}(C(K), F) = \prod_2(C(K), F)$.

(b) Se $2 < q < \infty$, então $\mathcal{L}(C(K), F) = \prod_{q,p}(C(K), F) = \prod_r(C(K), F)$ para todo $p < q$ e $q < r < \infty$.

Teorema 2.14. ***(Maurey)*** *Sejam E e F espaços de Banach.*

(a) Se E tem cotipo 2, então $\prod_2 (E,F) = \prod_1 (E,F)$.

(b) Se E tem cotipo $2 < q < \infty$, então $\prod_r (E,F) = \prod_1 (E,F)$ para todo $1 < r < q^*$.

(c) Se E e F têm cotipo 2, então $\prod_r (E,F) = \prod_1 (E,F)$ para todo $1 < r < \infty$.

Corolário 2.15. Se E tem cotipo $2 \leq q < \infty$, então toda sequência fracamente somável em E é fortemente q-somável. Em outras palavras, I_E é $(q;1)$-somante.

Outro resultado recente envolvendo o cotipo de espaços de Banach é o seguinte

Teorema 2.16. ***(Botelho, Pellegrino, 2009)*** *Sejam E e F espaços de Banach de dimensão infinita.*

(a) Se $\prod_1 (E,F) = \mathcal{L}(E,F)$, então $\cot E = \cot F = 2$.

(b) Se $2 \leq r < \cot F$ e $\prod_{q,r} (E,F) = \mathcal{L}(E,F)$, então $\mathcal{L}(\ell_1, \ell_{\cot F}) = \prod_{q,r} (\ell_1, \ell_{\cot F})$.

(c) Se $\cot F = \infty$ e $p \geq 1$, então existe um operador linear contínuo de E em F que não é p-somante.

2.4 Operadores multilineares múltiplo somantes

Com a consolidação dos estudos sobre operadores absolutamente somantes, o objetivo subsequente seria tentar generalizar todos os conceitos produzidos até então para ambientes mais gerais. Foi nesse cenário que surgiu o conceito de operador multilinear múltiplo somante, em trabalhos realizados de modo independentes por Matos em ([31]) e Pérez-García em ([38]). O objetivo desta seção é discorrer sobre os principais resultados relacionados as extensões dos operadores absolutamente somantes, exibindo gradativamente alguns resultados clássicos e outros recentes frutos de pesquisas atuais.

Definição 2.4.1. Se $1 \leq p_1, \ldots, p_n \leq q < \infty$, dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_n)$-somante se existe uma constante $C_n > 0$ tal que

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \left\| T\left(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_n}^{(n)}\right) \right\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_n \cdot \prod_{k=1}^{n} \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{p_k,w} \quad (*)$$

para toda $\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^{w}(E_k)$, com $k = 1, \ldots, n$.

Denotamos por $\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n} (E_1, \ldots, E_n; F)$ a classe formada por todos os operadores múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_n)$-somantes. O ínfimo das constantes C_n satisfazendo $(*)$

define uma norma em $\prod^{n}_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ que representamos por $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}$ (ou $\pi_{(q;p)}$ se $p_1=\cdots=p_k=p$ e por π_p quando $p_1=\cdots=p_k=p=q$). Quando um operador for múltiplo $(q;p,\ldots,p)$-somante, o chamaremos de múltiplo $(q;p)$-somante e escreveremos $\prod^{n}_{(q;p)}$ para denotar a classe munido da norma $\pi_{(q;p)}$. Se T for múltiplo $(p;p)$-somante, chamaremos simplesmente de múltiplo p-somante, com a classe representada por $\prod^{n}_{p}$ junto com a norma π_p. Quando $n=1$, revisitamos a definição de operador absolutamente $(q;p)$-somante.

Observe que $\prod^{n}_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$, pois, dados T_1,$T_2\in\prod^{n}_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ e $\lambda\in\mathbb{K}$, obtemos:

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left\|T_1+\lambda T_2\left(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(n)}_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{m\text{-Linearidade}}{=}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left\|T_1\left(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(n)}_{j_n}\right)+\lambda T_2\left(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(n)}_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left\|T_1\left(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(n)}_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{m}\left\|\lambda T_2\left(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(n)}_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{\text{def}}{\leq} C_1\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x^{(k)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}+|\lambda|\,C_2\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x^{(k)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}\\
&\leq C\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x^{(k)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w},\text{ onde } C=(C_1+|\lambda|\,C_2)>0.
\end{aligned}
$$

Como m é arbitário, fazendo $m\to\infty$, segue que,

$$
\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T_1+\lambda T_2\left(x^{(1)}_{j_1},\ldots,x^{(n)}_{j_n}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x^{(k)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}.
$$

Consequentemente, $T_1+\lambda T_2\in\prod^{n}_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$ como almejávamos. Os casos particulares para os operadores p-somantes e absolutamente $(q;p)$-somantes seguem em virtude deste resultado.

Vamos ratificar nossa afirmação verificando que $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}$ define uma norma em $\prod^{n}_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Com isso, os casos anteriores possuem procedimento análogo. De fato,

Sejam $\left(x^{(k)}_j\right)_{j=1}^{\infty}\in\ell^{w}_{p_k}(E_k)$, com $k=1,\ldots,n$. Seja $T\in\prod^{n}_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Se $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)=0$, então

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq 0.$$

Consequentemente, $T\equiv 0$. Se T é o operador nulo, é fácil ver que $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)=0$.

Agora, considere $\lambda\in\mathbb{K}$ e $T\in\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Note que,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|\lambda T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,\lambda x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}\right)\left\|\left(\lambda x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}\\ &= |\lambda|\,\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}.\end{aligned}$$

E daí,

$$\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(\lambda T)\leq|\lambda|\,\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T).$$

Por outro lado,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|\lambda T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}=|\lambda|.\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\quad\text{e}$$

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|\lambda T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(\lambda T)\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}.$$

Dessa forma,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left\|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right\|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\frac{1}{|\lambda|}.\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(\lambda T)\prod_{k=1}^{n}\left\|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w}$$

Logo, $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)\leq\frac{1}{|\lambda|}.\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(\lambda T)\Rightarrow\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(\lambda T)=|\lambda|\,\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)$.

Por fim, dados T_1,$T_2 \in \prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$, temos:

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\left|(T_1+T_2)\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{m\text{-Linearidade}}{=}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\left|T_1\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)+T_2\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\overset{\text{Minkowski}}{\leq}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\left|T_1\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}\left|\left|T_2\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_n}^{(n)}\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leq\left(\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T_1)+\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T_2)\right)\prod_{k=1}^{n}\left|\left|\left(x_j^k\right)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T_1+T_2)\leq\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T_1)+\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T_2).$$

Desde o primeiro momento em que começamos a trabalhar com os operadores multilineares, sempre consideramos o caso em que $q > p_j$, para todo $j = 1,\ldots,n$. Isso porque o caso em que $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$ nos revela uma peculiaridade. Nestas condições, o único operador múltiplo $(q;p_1,\ldots,p_n)$-somante é o operador identicamente nulo. Vejamos isso na seguinte

Proposição 2.17. Seja $q < p_j$, para algum $1 \leq j \leq n$. Se $T \in \prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$, então, T é o operador nulo.

Demonstração. Com efeito, pela relação de inclusão entre os espaços de sequências, se $q < p_j$ para algum $1 \leq j \leq n$ obtemos que $\ell_{p_j} \supset \ell_q$ propriamente. Consequentemente, é possível escolher $\left(\lambda_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty} \in \ell_{p_j} - \ell_q$. Com isso, dado $x_j \in E_j$, com $x_j \neq 0$, asseguramos que $\left(\lambda_{i_j}x_j\right)_{i_j=1}^{\infty} \in \ell_{p_j}^{w}(E_j)$, uma vez que pra qualquer $\varphi \in (E_j)'$,

$$\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(\lambda_{i_j}x_j\right)\right|^{p_j}\leq\sum_{i_j=1}^{\infty}\left(||\varphi||.\left|\lambda_{i_j}x_j\right|\right)^{p_j}\overset{\text{def}}{=}||\varphi||^{p_j}.||x_j||^{p_j}.\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\lambda_{i_j}\right|^{p_j}<\infty.$$

Suponhamos por contradição, que exista $T \neq 0$ tal que $T \in \prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$. Dessa forma, para qualquer escolha de $x_{i_k}^k \in E_k$, temos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}\left|\left|T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq C.\prod_{l=1}^{n}\left|\left|\left(x_{i_l}^l\right)_{i_l=1}^{\infty}\right|\right|_{p_l,w}.$$

Em particular, tomando $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} = (x_k,0,\ldots,0,\ldots)$, para cada $1 \leq k \leq n$, $k \neq j$

obtemos,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}\left|\left|T\left(x_{i_1}^1,\ldots,\lambda_{i_j}x_j,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\left|T\left(x_1,\ldots,\lambda_{i_j}x_j,\ldots,x_n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq C\left(\prod_{k\neq j}^{n}\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}\right)\left|\left|\left(\lambda_{i_j}x_j\right)_{i_j=1}^{\infty}\right|\right|_{p_j,w}$$

E daí,

$$\begin{aligned}&||T\left(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_n\right)||\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\lambda_{i_j}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq C.\left(\prod_{k\neq j}^{n}\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}\right)\left|\varphi\left(x_j\right)\right|\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\lambda_{i_j}\right|^{p_j}\right)^{\frac{1}{p_j}}.\end{aligned}$$

Decorre daí que $\left(\sum_{i_j=1}^{\infty}\left|\lambda_{i_j}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}<\infty$, ou seja, $\left(\lambda_{i_j}\right)_{i_j=1}^{\infty}\in\ell_q$, provocando uma contradição. Portanto, $T\equiv 0$. $\square$

Lema 2.18. Se $T\in\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$, então $||T||_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)}\leq\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\left(T\right)$.

Demonstração. Considere $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\in\ell_{p_k}^w\left(E_k\right)$, para todo $k=1,\ldots,n$. Sendo $T\in\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$, temos

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}\left|\left|T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leq\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\left(T\right)\prod_{k=1}^{n}\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}.$$

Em particular, consideremos $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}=\left(x_k,0,\ldots,0,\ldots\right)$ para cada $1\leq k\leq n$. Desse modo,

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}\left|\left|T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}=\left(||T\left(x_1,\ldots,x_n\right)||^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\left(T\right)\prod_{k=1}^{n}\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}.$$

Por definição, sabemos que

$$\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}=\sup_{\varphi\in B_{(E_k)'}}\left(\sum_{i_k=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_{i_k}^k\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}.$$

Entretanto, pela escolha que fizemos

$$\left\|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right\|_{p_k,w} = \sup_{\|\varphi\|\leq 1} |\varphi(x_k)| \overset{\text{H-Banach}}{=} \|x_k\|.$$

Logo,

$$\|T(x_1,\ldots,x_n)\| \leq \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T) \prod_{k=1}^{n} \|x_k\|.$$

Tomando o supremo em ambos os lados com $\|x_k\| = 1$, para $k = 1,\ldots,n$, por definição segue que

$$\|T\| \leq \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T).$$

□

A seguinte proposição nos fornece uma boa caracterização para os operadores multilineares. Ela será útil na demonstração de que $\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1,\ldots,E_n;F)$ com sua norma usual é espaço de Banach.

Proposição 2.19. Sejam $1 \leq p_1,\ldots,p_n \leq q < \infty$ e $T \in \mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)$. São equivalentes:

(a) T é múltiplo $(q;p_1,\ldots,p_n)$-somante

(b) Para cada sequência $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^w(E_k)$, temos

$$\left(T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \in \ell_q(\mathbb{N}^n;F).$$

Com isso, o operador multilinear associado

$$\widetilde{T} : \ell_{p_1}^w(E_1) \times \cdots \times \ell_{p_n}^w(E_n) \longrightarrow \ell_q(\mathbb{N}^n;F)$$

definido por

$$\widetilde{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}$$

é contínuo e além disso,

$$\left\|\widetilde{T}\right\| = \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)$$

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b). Considere $\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^w\left(E_k\right)$. Note que,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left|\left|T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{m} \left|\left|T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\overset{\text{Hipótese}}{\leq} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\left(T\right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{m}\right|\right|_{p_k,w}\right)\right) \\
&= \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\left(T\right) \sup_{m\in\mathbb{N}} \left(\prod_{k=1}^{n} \left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{m}\right|\right|_{p_k,w}\right) \\
&= \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\left(T\right) \left(\prod_{k=1}^{n} \left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w}\right) \overset{\text{Hipótese}}{<} \infty
\end{aligned}$$

Consequentemente, $\left(T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \in \ell_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Para lograrmos êxito, necessitamos que o operador $\widetilde{T}$ definido acima seja contínuo. Para tanto, recorreremos ao clássico Teorema do Gráfico Fechado. De fato,

Seja $(x_m)_{m=1}^{\infty} \subset \ell_{p_1}^w\left(E_1\right) \times \cdots \times \ell_{p_n}^w\left(E_n\right)$, dada por

$$(x_m) = \left(\left(x_{m,i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{m,i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)$$

e suponha que $\left(x_m,\widetilde{T}\left(x_m\right)\right)_{m=1}^{\infty} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (x,z)$, onde $x = \left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right) \in \ell_{p_1}^w\left(E_1\right) \times \cdots \times \ell_{p_n}^w\left(E_n\right)$ e $z = \left(z_{i_1},\ldots,z_{i_n}\right)_{i_1,\ldots i_n=1}^{\infty} \in \ell_q\left(\mathbb{N}^n;F\right)$, ou seja, $(x_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $\widetilde{T}\left(x_m\right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} z$. Vamos mostrar que $z = \widetilde{T}\left(x\right)$. De fato,

Observe que como $(x_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} x$, isso nos garante uma convergência coordenada a coordenada, ou seja,

$$\left(x_{m,i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \in \ell_{p_k}^w\left(E_k\right), \text{ para todo } k = 1,\ldots,n.$$

Por conseguinte, para $k \in \{1,\ldots,n\}$ garantimos que $\left(x_{m,i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty} \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}$. Por definição, dado $\varepsilon > 0$, encontramos um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N_0$ obtemos,

$$\sup_{\varphi\in B_{E_k'}} \left(\sum_{i_k=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_{n,i_k}^k - x_{i_k}^k\right)\right|^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} \overset{\text{def}}{=} \left|\left|x_m^k - x^k\right|\right|_{p_k,w} < \varepsilon.$$

Dessa forma,

$$\sum_{i_k=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_{n,i_k}^k - x_{i_k}^k\right)\right|^{p_k} < \varepsilon^{p_k} \text{ para todo } \varphi \in B_{E_k'}.$$

Neste caso,

$$n \geq N_0 \Longrightarrow \left\| x_{n,i_k}^k - x_{i_k}^k \right\| = \sup_{\varphi \in B_{E_k'}} \left| \varphi \left(x_{n,i_k}^k - x_{i_k}^k \right) \right| < \varepsilon \text{ para todo } i_k.$$

Consequentemente,

$$x_{m,i_k}^k \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_{i_k}^k \in E_k, \forall k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Assim,

$$\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} \left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n \right) \in E_1 \times \cdots \times E_n.$$

A continuidade de T nos permite que

$$T\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n \right) \in F.$$

Como $\left(\left(x_{m,i_1}^1 \right)_{i_1=1}^\infty, \ldots, \left(x_{m,i_n}^n \right)_{i_n=1}^\infty \right) \in \ell_{p_1}^w (E_1) \times \cdots \times \ell_{p_n}^w (E_n)$, para cada $i_1, \ldots, i_n$ temos,

$$\widetilde{T} \left(\left(x_{m,i_1}^1 \right)_{i_1=1}^\infty, \ldots, \left(x_{m,i_n}^n \right)_{i_n=1}^\infty \right) = \left(T\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right) \right)_{m=1}^\infty.$$

Com isso, tomando o limite com $m \to \infty$,

$$\lim_{m\to\infty} \widetilde{T} \left(\left(x_{m,i_1}^1 \right)_{i_1=1}^\infty, \ldots, \left(x_{m,i_n}^n \right)_{i_n=1}^\infty \right) = \lim_{m\to\infty} T\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right)_{m=1}^\infty = T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n \right).$$

No entanto, por hipótese $\widetilde{T}(x_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})_{i_1,\ldots i_n=1}^\infty$. Por definição, para o $\varepsilon > 0$ dado, é possível encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \widetilde{T} \left(\left(x_{m,i_1}^1 \right)_{i_1=1}^\infty, \ldots, \left(x_{m,i_n}^n \right)_{i_n=1}^\infty \right) - (z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})_{i_1,\ldots i_n=1}^\infty \right\|_q < \varepsilon \text{ sempre que } m \geq N.$$

E daí,

$$\left\| \left(T\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right) \right)_{m=1}^\infty - (z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})_{i_1,\ldots i_n=1}^\infty \right\|_q < \varepsilon.$$

Então, para cada $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}^n$ temos,

$$\left\| T\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right)_{m=1}^\infty - (z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})_{i_1,\ldots i_n=1}^\infty \right\| < \varepsilon, \text{ sempre que } m \geq N.$$

Logo,

$$\lim_{m\to\infty} T\left(x_{m,i_1}^1, \ldots, x_{m,i_n}^n \right)_{m=1}^\infty = (z_{i_1}, \ldots, z_{i_n})_{i_1,\ldots i_n=1}^\infty.$$

Pela unicidade do limite, temos,

$$(z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}) = T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n \right) \text{ para cada } i_1, \ldots, i_n.$$

E daí,

$$\widetilde{T}(x_m) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n\right)_{i_1,\ldots i_n=1}^{\infty} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{T}(x) = z.$$

Portanto, segue do Teorema do Gráfico Fechado que $\widetilde{T}$ é contínuo. Além disso, note que,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left|\left|T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n\right)\right|\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} &= \left|\left|T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n\right)\right|\right|_q \\
&\overset{\text{def}}{=} \left|\left|\widetilde{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right|\right|_q \\
&\overset{\widetilde{T}\text{ é limitado}}{\leq} \left|\left|\widetilde{T}\right|\right| \prod_{k=1}^{n} \left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Logo, T é múltiplo $(q; p_1, \ldots, p_n)$-somante com $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T) \leq \left|\left|\widetilde{T}\right|\right|$. Por outro lado, como

$$\begin{aligned}
\left|\left|\widetilde{T}\right|\right| &= \sup_{\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w} \leq 1} \left|\left|\widetilde{T}\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty}, \ldots, \left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right|\right| \\
&= \sup_{\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w} \leq 1} \left(\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \left|T\left(x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_n}^n\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{\left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w} \leq 1} \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T) \prod_{k=1}^{n} \left|\left|\left(x_{i_k}^k\right)_{i_k=1}^{\infty}\right|\right|_{p_k,w} \\
&= \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)
\end{aligned}$$

Concluímos que $\left|\left|\widetilde{T}\right|\right| \leq \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)$. Portanto, $\pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T) = \left|\left|\widetilde{T}\right|\right|$. □

Teorema 2.20. $\left(\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1, \ldots, E_n; F), \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}\right)$ *é espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Pelo lema anterior, como $||T||_{\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n;F)} \leq \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T)$, $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ será de Cauchy em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e sendo este Banach, $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para algum $T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Considere então o seguinte operador

$$\Psi : \prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^{n}(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\ell_{p_1}^w(E_1), \ldots, \ell_{p_n}^w(E_n); \ell_q(\mathbb{N}^n; F)\right)$$

definido por $\Psi(T) = \widetilde{T}$. Note que Ψ está bem definido. Além disso, é uma isometria visto que,

$$||\Psi(T)|| = \left|\left|\widetilde{T}\right|\right| \overset{\text{proposição2.19}}{=} \pi_{(q;p_1,\ldots,p_n)}(T) \overset{\text{def}}{=} ||T||.$$

Com isso, $\left(\widetilde{T}_k\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}\left({}^n\ell_{p_1}^w(E_1),\ldots,\ell_{p_n}^w(E_n);\ell_q(\mathbb{N}^n;F)\right)$. Como este é Banach, pois $\ell_q(\mathbb{N}^n;F)$ é Banach, isso implica que $\left(\widetilde{T}_k\right)_{k=1}^{\infty}$ converge para algum operador $S \in \mathcal{L}\left({}^n\ell_{p_1}^w(E_1),\ldots,\ell_{p_n}^w(E_n);\ell_q(\mathbb{N}^n;F)\right)$. Consideremos a projeção

$$P_{k_1,\ldots,k_n} : \ell_q(\mathbb{N}^n;F) \longrightarrow F$$

definida por $P_{k_1,\ldots,k_n}(x_{i_1},\ldots,_{i_n})_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} = x_{k_1,\ldots,k_n}$. Por conseguinte, obtemos

$$\lim_{k\to\infty} P_{k_1,\ldots,k_n}\left(\widetilde{T}_k\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right) = P_{k_1,\ldots,k_n}\left(S\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right).$$

Além disso, como $T_k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} T$, temos

$$\lim_{k\to\infty}\left(T_k\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} = \left(T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}.$$

Note que,

$$\begin{aligned} P_{k_1,\ldots,k_n}\left(\widetilde{T}_k\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right) &= P_{k_1,\ldots,k_n}\left(T_k\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \\ &= T_k\left(x_{k_1}^1,\ldots,x_{k_n}^n\right). \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os lados obtemos,

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} P_{k_1,\ldots,k_n}\left(\widetilde{T}_k\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right) &= \lim_{k\to\infty} P_{k_1,\ldots,k_n}\left(T_k\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \\ &= P_{k_1,\ldots,k_n}\left(T\left(x_{i_1}^1,\ldots,x_{i_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} \\ &= T\left(x_{k_1}^1,\ldots,x_{k_n}^n\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$P_{k_1,\ldots,k_n}\left(S\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right)\right) = T\left(x_{k_1}^1,\ldots,x_{k_n}^n\right).$$

Isto siginifica mais precisamente que

$$S\left(\left(x_{i_1}^1\right)_{i_1=1}^{\infty},\ldots,\left(x_{i_n}^n\right)_{i_n=1}^{\infty}\right) = \left(T\left(x_{k_1}^1,\ldots,x_{k_n}^n\right)\right)_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}, \forall (k_1,\ldots,k_n) \in \mathbb{N}^n.$$

E daí, garantimos que $T \in \mathcal{L}\left({}^n\ell_{p_1}^w(E_1),\ldots,\ell_{p_n}^w(E_n);\ell_q(\mathbb{N}^n;F)\right)$, consequentemente, por (2.19), $T \in \prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^n(E_1,\ldots,E_n;F)$. Resulta daí que $\prod_{(q;p_1,\ldots,p_n)}^n(E_1,\ldots,E_n;F)$ é Banach como desejávamos. □

O lema a seguir será útil na demonstração das seguintes proposições referentes a aplicações multilineares. Estas, por outro lado, inserem a Desigualdade de Bohnenblust-Hille que veremos no próximo capítulo no contexto dos operadores múltiplo somantes.

Lema 2.21. A correspondência $u \longrightarrow (ue_n)_n$ define um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, E)$ em $\ell_p^w(E)$ quando $1 < p < \infty$. Quando $p = 1$, o isomorfismo isométrico é de $\mathcal{L}(c_0, E)$ em $\ell_1^w(E)$.

Para detalhes da demonstração veja o Apêndice, Lema 3.15.

Proposição 2.22. São equivalentes:

(i) Existe $C > 0$ tal que para toda aplicação m-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{K}$ temos

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C.\,||T||\,.\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{n}\right|\right|_{p^*,w}.$$

(ii) Existe $C > 0$ tal que para toda aplicação m-linear $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{K}$ temos

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \left|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C.\,||T||\,.\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{p^*,w}.$$

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (i)$. Consideremos $x_j^{(k)} \in \ell_{p^*}^w(E_k)$ com $x_j^{(k)} = 0$, $\forall j > n$. E daí, usando (ii) segue que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \left|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\overset{\text{por } (ii)}{\leq} C.\,||T||\,.\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{p^*,w} \\ &= C.\,||T||\,.\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{n}\right|\right|_{p^*,w}.\end{aligned}$$

Agora suponhamos que (i) seja válido. Vamos mostrar que $(i) \Rightarrow (ii)$. De fato,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq C.\,||T||\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{n}\right|\right|_{p^*,w} \\ &\leq C.\,||T||\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{p^*,w}.\end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{\infty} \left|T\left(x_{j_1}^{(1)},\ldots,x_{j_m}^{(m)}\right)\right|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq C.\,||T||\prod_{k=1}^{m}\left|\left|\left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{p^*,w}$$

como queríamos demonstrar. $\square$

Proposição 2.23. Sejam $1 \leq q_1, \ldots, q_m \leq \infty$ e $p > 0$. São equivalentes:

(i) Para todo inteiro positivo n, existe uma constante $C > 0$ tal que para todo operador m-linear $A : \ell_{q_1}^n \times \cdots \times \ell_{q_m}^n \longrightarrow F$, com F espaço de Banach, temos:

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \|A(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C. \|A\|.$$

(ii) Para todo operador m-linear

$$T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$$

com $E_1, \ldots, E_m$ espaços de Banach e para quaisquer $x_{k_i}^{(i)} \in E_i$, $k_i = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, m$ temos:

$$\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{n} \left\| T\left(x_{k_1}^{(1)}, \ldots, x_{k_m}^{(m)} \right) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C. \|T\| \prod_{i=1}^{m} \left\| \left(x_{k_i}^{(i)} \right)_{k_i=1}^{n} \right\|_{q_i^*, w}.$$

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$. Dados $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)} \in E_i$, considere os seguintes operadores

$$u_i : \ell_{q_i}^n \longrightarrow E_i$$

definidos por

$$u_i\left((a_j)_{j=1}^n \right) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{(i)}, \text{com } i = 1, \ldots, m.$$

Note que cada u_i está bem definido e é claramente linear. Além disso, pelo lema anterior, para cada $i = 1, \ldots, m$, u_i induz um isomorfismo isométrico

$$\Psi_i : \mathcal{L}(\ell_{q_i}, E_i) \longrightarrow \ell_{q_i^*}^w (E_i)$$

dado por

$$\Psi_i(u_i) \stackrel{\text{def}}{=} (u_i(e_j))_{j=1}^n.$$

Assim, para toda $\left(y_j^{(i)} \right)_{j=1}^n \in \ell_{q_i^*}^w (E_i)$ existe $u_i \in \mathcal{L}(\ell_{q_i}, E_i)$ tal que

$$\Psi_i(u_i) = \left(y_j^{(i)} \right)_{j=1}^n.$$

Ou seja,

$$(u_i(e_j))_{j=1}^n = \left(y_j^{(i)} \right)_{j=1}^n.$$

Como cada Ψ_i é uma isometria, segue que

$$||u_i|| = \left|\left|(u_i(e_j))_{j=1}^n\right|\right|_{q_i^*,w} = \left|\left|\left(y_j^{(i)}\right)_{j=1}^n\right|\right|_{q_i^*,w}.$$

Seja

$$T \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$$

e defina

$$B : \ell_{q_1}^n \times \cdots \times \ell_{q_m}^n \longrightarrow F$$

por

$$B\left((a_{k_1})_{k_1=1}^n, \ldots, (a_{k_m})_{k_m=1}^n\right) = T\left(\left(u_1(a_{k_1})_{k_1=1}^n\right), \ldots, \left(u_m(a_{k_m})_{k_m=1}^n\right)\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^n \left|\left|T\left(y_{k_1}^{(1)}, \ldots, y_{k_m}^{(m)}\right)\right|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^n ||T(u_1(e_{j_1}), \ldots u_m(e_{j_m}))||^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^n ||B(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m})||^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{por } (i)}{\leq} C\,||B|| \\
&\leq C\,||T||\,.\,||u_1|| \ldots ||u_m|| \\
&\leq C\,||T||\ \,.\,||(u_1(e_{j_1}))||_{q_i^*,w} \ldots ||(u_m(e_{j_m}))||_{q_i^*,w} \\
&\leq C\,||T||\,.\prod_{i=1}^m \left|\left|\left(y_{k_i}^{(i)}\right)_{k_i=1}^n\right|\right|_{q_i^*,w}.
\end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Este caso é imediato, pois basta considerarmos

$$y_{k_i}^{(i)} = e_{j_i}, \text{ com } i = 1, \ldots, m$$

e

$$E_1 = \ell_{q_1}^n, \ldots, E_m = \ell_{q_m}^n$$

Note que,

$$||(e_j)||_{q_i^*,w} \overset{\text{def}}{=} \sup_{||\varphi||=1} ||\varphi(e_j)||_{q_i^*} \overset{\text{isometria}}{=} \sup_{||\varphi||=1} ||\varphi|| = 1.$$

Por conseguinte,

$$\left(\sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{n} \left\|A\left(e_{j_1},\ldots,e_{j_m}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \overset{\text{por }(ii)}{\leq} C.\left\|A\right\|.\prod_{i=1}^{m}\left\|\left(e_j^{(i)}\right)_{j=1}^{n}\right\|_{q_i^*,w}.$$

□

Dedicaremos a parte final desta seção para exibirmos alguns dos principais resultados recorrentes na literatura. São contribuições recentes, marcadas pela conexão com os conceitos apresentados no ambiente linear, contribuindo de maneira significativa para a consolidação da teoria. Nesse âmbito, as teses de Pérez-García ([38]) e Sousa ([41]) ambas em 2003, trouxeram resultados que merecem destaque.

Teorema 2.24. ***(Pérez-García, 2003)*** *.Se $1 \leq p \leq q < 2$ e $n \geq 2$, então*

$$\prod\nolimits_p^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right) \subset \prod\nolimits_q^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right).$$

Em virtude deste, temos um resultado mais geral.

Teorema 2.25. ***(Pérez-García, 2003)****. Se $1 \leq p \leq q < 2$ e $n \geq 2$, então*

$$\prod\nolimits_p^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right) \subset \prod\nolimits_q^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right)$$

para qualquer espaço de Banach F com cotipo 2 e quaisquer espaços de Banach $E_1,\ldots,E_n$.

Outro resultado clássico que aparece no contexto multilinear é o famoso Teorema de Grothendieck, contemplado também no trabalho de Pérez-García.([38]).

Teorema 2.26. ***(Pérez-García, 2003)****. Se $1 \leq p \leq 2$ então*

$$\prod\nolimits_p^n\left(\ell_1;\ell_2\right) = \mathcal{L}\left({}^n\ell_1;\ell_2\right).$$

Teorema 2.27. ***(Botelho, Pellegrino, 2008 e Popa 2009)*** *.Se $1 \leq p,q < 2$ e $E_1,\ldots,E_n$ são espaços de Banach com cotipo 2, então para todo espaço de Banach F*

$$\prod\nolimits_p^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right) = \prod\nolimits_q^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right).$$

Teorema 2.28. ***(Botelho, Michels, Pellegrino, 2010).*** *Se $1 \leq p \leq q \leq \infty$ e $E_1,\ldots,E_n$ são espaços $\mathcal{L}_\infty$, então*

$$\prod\nolimits_{m,p}^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right) \subset \prod\nolimits_{m,q}^n\left(E_1,\ldots,E_n;F\right).$$

Capítulo 3

Aplicações da Desigualdade de Hölder com normas mistas

3.1 Desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille

Iniciaremos o capítulo com um resultado clássico da teoria dos operadores multilineares: a Desigualdade de Bohnenblust-Hille presente em [11]. Esta desigualdade foi apresentada pela primeira vez em 1931, e tem tido papel importante para aplicações em diferentes áreas como, por exemplo, na Análise Complexa, Teoria Analítica dos Números e até mesmo na Teoria da Informação Quântica. Veja ([16, 8, 33]).

Nesta etapa, as funções de Rademacher definidas na seção (2.3) serão importantes. Elas aparecem na Desigualdade de Khinchine (veja [18]), que desempenha um papel central nessa teoria.

Teorema 3.1 (Desigualdade de Khinchine)**.** *Para qualquer $0 < p < \infty$, existem constantes positivas A_p e B_p tais que*

$$A_p.\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{n}a_j r_j\left(t\right)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p.\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

para qualquer sequência de escalares $(a_j)_{j=1}^{n}$ e qualquer inteiro positivo n.

As constantes ótimas da Desigualdade de Khinchine são as mesmas para o caso de escalares reais e complexos (veja [15]). Elas foram obtidas por U. Haagerup ([24]) e são dadas pelas expressões

$$A_p = \begin{cases} 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (0, p_0]; \\ 2^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (p_0, 2)\,; \\ 1, & \text{se } p \in [2, \infty). \end{cases} \tag{3.1}$$

e

$$B_p = \begin{cases} 1, & \text{se } p \in (0,2]; \\ 2^{\frac{1}{2}}.\left(\frac{\Gamma((p+1)/2)}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{se } p \in (2,\infty), \end{cases}$$

onde Γ denota a Função Gama, e p_0 é o número real pertencente ao intervalo $(1,2)$ que satisfaz $\Gamma((p+1)/2) = \sqrt{\pi}/2$. $p_0 \approx 1,84742$.

Antes de passarmos para a Desigualdade de Bohnenblust-Hille, precisamos de uma desigualdade que será crucial para provar a otimalidade dos expoentes. Ela é conhecida como Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund. Para nossos objetivos, será interessante destacar aqui sua versão generalizada, que aparece em [5, Lemma 6.1].

Teorema 3.2 (Desigualdade de Kahane–Salem–Zygmund)**.** *Sejam $m,n \geq 1$, $p \in [1,\infty]$ e*

$$\alpha(p) \colon = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{p}, & \text{se } p \geq 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então existe uma constante universal C_m(dependendo apenas de m) e uma aplicação m-linear $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ da forma

$$A(z^1, \ldots z^m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} \pm\, z_{i_1}^1 \cdots z_{i_m}^m \ ,$$

tais que

$$||A|| \leq C_m.n^{\frac{1}{2}+m\alpha(p)}.$$

Nesta etapa, precisaremos também de um resultado pouco conhecido devido a Minkowski. O resultado na verdade é uma consequência da famosa Desigualdade de Minkowski ou comumente chamada de Desigualdade triangular para os espaços L_p. Para detalhes da demonstração veja [22, Corolary 5.4.2].

Teorema 3.3 (Minkowski)**.** *Sejam $0 < p \leq q < \infty$ e $(c_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ uma matriz escalar. Então*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_{ij}|^p\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|c_{ij}|^q\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 3.4 (Desigualdade de Bohnenblust–Hille)**.** *Para cada inteiro positivo $m \geq 1$, existe uma constante $C_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que*

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} ||T(e_{i_1,\ldots,}e_{i_m})||^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m^{\mathbb{K}}\, ||T||\,,$$

para toda aplicação m-linear contínua $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Além disso, o expoente $\frac{2m}{m+1}$ é ótimo.

Demonstração. Provemos por indução. Para $m = 1$, o resultado é imediato. Para a demonstração por indução, não é necessário fazer o caso $m = 2$ mas como ele resgata a Desigualdade $\frac{4}{3}$ de Littlewood, vamos demonstrá-lo. Provemos que existe uma constante $C_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq C_2^{\mathbb{K}} \, ||T||$$

para toda forma bilinear contínua $T : c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$. Para tanto, a abordagem mais rápida seria utilizar o Corolário 1.3 ou a Desigualdade de Hölder para somas mistas (como de fato será feito na demonstração do caso geral). Faremos uma demonstração utilizando apenas a Desigualdade de Hölder clássica.

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3}} . |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3}}\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3}.3}\right)^{\frac{1}{3}} . \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{3}} . \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|\right)^{\frac{2}{3}} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} . \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|\right)^{\frac{2}{3}.3}\right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} . \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{3}} .
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Todavia, pelo Teorema 3.3 garantimos que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}} .$$

E daí,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty}|T(e_i,e_j)|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}} . \left[\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Para concluirmos nosso objetivo precisamos estimar cada um dos fatores acima. A estimativa é obtida utilizando a Desigualdade de Khinchine. Por (3.1), sabemos que $A_1^{-1} = \sqrt{2}$ e, pela Desigualdade de Khinchine para $p = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|T(e_i,e_j)|^2\right)^{\frac{1}{2}.1}\right]^{\frac{1}{1}} &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sqrt{2}\int_0^1\left|\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)T(e_i,e_j)\right|^1 dt\right)^{\frac{1}{1}.1}\right]^{\frac{1}{1}} \\
&= \sqrt{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^1\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)e_j)\right| dt \\
&\leq \sqrt{2}\sup_{t\in[0,1]}\sum_{i=1}^{\infty}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{\infty}r_j(t)e_j)\right|.
\end{aligned}$$

Agora, para cada t fixo, considere o operador linear $T_t : c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ definido por

$$T_t(y) = T\left(\sum_{j=1}^{N}r_j(t)e_j, y\right).$$

Note que T_t é limitado, pois,

$$||T_t|| = \left|\left|T\left(\sum_{j=1}^{N}r_j(t)e_j, \cdot\right)\right|\right| \leq ||T|| . \left|\left|\sum_{j=1}^{N}r_j(t)e_j\right|\right| \leq ||T|| . \left|\left|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{1,w} = ||T|| .$$

Observe que $\left|\left|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{1,w} = 1$. De fato, a aplicação $\Psi : (c_0)' \longrightarrow \ell_1$ dada por $\Psi(\varphi) = (\varphi(e_j))_j$ é um isomorfismo isométrico. E daí,

$$\begin{aligned}
\left|\left|(e_j)_{j=1}^{\infty}\right|\right|_{1,w} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varphi\in B_{(c_0)'}}\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi(e_j)| &= \sup_{\varphi\in B_{(c_0)'}}||(\varphi(e_j))||_1 \\
&= \sup_{\varphi\in B_{(c_0)'}}||\varphi|| \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} r_j(t) e_j \right\| = ||\delta_1 e_1 + \cdots + \delta_N e_N|| \leq 1 = \left\| (e_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{1,w},$$

com $\delta_j \in \{0, 1, -1\}$. Com isso,

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} \sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{\infty} \left| T(e_i, \sum_{j=1}^{\infty} r_j(t) e_j) \right| &= \sqrt{2} \sup_{t \in [0,1]} \sum_{i=1}^{\infty} |T_t(e_i)| \\
&\leq \sqrt{2} \sup_{t \in [0,1]} ||T_t|| \, . \, ||(e_i)_{i=1}^{\infty}||_{1,w} \\
&= \sqrt{2} \, ||T|| \, .
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2} . 1} \right]^{\frac{1}{1}} \leq \sqrt{2} \, ||T|| \, .$$

Repetindo o argumento, obtemos a mesma estimativa para o segundo fator, isto é,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \, ||T|| \, .$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |T(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \left(\sqrt{2} \, ||T|| \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sqrt{2} \, ||T|| \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \, ||T|| \, .$$

Vejamos o caso geral (que também recupera o caso $m = 2$), agora utilizando a Desigualdade de Hölder para somas mistas. Aplicando a Desigualdade de Khinchine para $p = \frac{2m-2}{m}$, segue que

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left(\sum_{i_m=1}^{N} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}.\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&\leq \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left(A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t) T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}) \right|^{\frac{2m-2}{m}} dt_m \right)^{\frac{m}{2m-2}.\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&= A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left(\int_0^1 \left| T(e_{i_1},\ldots,e_{i_{m-1}}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t) e_{i_m}) \right|^{\frac{2m-2}{m}} dt_m \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&= A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} \left(\int_0^1 \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left| T(e_{i_1},\ldots,e_{i_{m-1}}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t) e_{i_m}) \right|^{\frac{2m-2}{m}} dt_m \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&\leq A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} \left(\sup_{t\in[0,1]} \sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{N} \left| T(e_{i_1},\ldots,e_{i_{m-1}}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t) e_{i_m}) \right|^{\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&\leq A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} \left(\sup_{t\in[0,1]} C_{m-1}^{\frac{2m-2}{m}} \left\| T(e_{i_1},\ldots,e_{i_{m-1}}, \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t) e_{i_m}) \right\|^{\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&\leq A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} C_{m-1} \left(\sup_{t\in[0,1]} ||T||^{\frac{2m-2}{m}} \left\| \sum_{i_m=1}^{N} r_{i_m}(t) e_{i_m} \right\|^{\frac{2m-2}{m}} \right)^{\frac{m}{2m-2}} \\
&= A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} C_{m-1} ||T|| \\
&= A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1} ||T|| .
\end{aligned}
$$

Com o auxílio do Teorema (3.3) , obtemos as mesmas estimativas para os expoentes múltiplos

$$\left(\frac{2m-2}{m}, \ldots, 2, \frac{2m-2}{m} \right), \ldots, \left(2, \frac{2m-2}{m}, \ldots, \frac{2m-2}{m} \right).$$

Para concluirmos a prova, consideremos $Te_I = T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})$ e os expoentes múltiplos $q_j = \left(\frac{2m-2}{m}, \ldots, 2, \frac{2m-2}{m}\right)$, com 2 na $j-$ésima posição e $s_j = \frac{2}{m+1}$, para $j = 1,\ldots,m$. Primeiramente, note que

$$\frac{1}{\frac{2}{m+1}} = 1.\frac{1}{2} + (m-1) \cdot \frac{1}{\frac{2m-2}{m}}.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder com normas mistas (Teorema 1.2), temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |Te_I|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \\
&= \left[\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |Te_I|^{\frac{2}{m+1}} \ldots |Te_I|^{\frac{2}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2}}\right]^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \left[\begin{array}{c} \left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{\infty} |Te_I|^{\frac{2m-2}{m}}\right)^{\frac{m}{2m-2}.2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \cdots \times \\ \left(\sum_{i_1,\ldots,i_{m-1}=1}^{\infty}\left(\sum_{i_m=1}^{\infty} |Te_I|^2\right)^{\frac{1}{2}.\frac{2m-2}{m}}\right)^{\frac{m}{2m-2}} \end{array}\right]^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \left[\left(A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}\left|\left|T\right|\right|\right)\cdots\left(A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}\left|\left|T\right|\right|\right)\right]^{\frac{1}{m}} \\
&= \left[\left(A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}\left|\left|T\right|\right|\right)^{m}\right]^{\frac{1}{m}} \\
&= A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}\left|\left|T\right|\right|.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}\left|\left|T\right|\right|,
$$

e o resultado está provado para $C_m^{\mathbb{K}} = A_{\frac{2m-2}{m}}^{-1}$. □

Em conexão com o capítulo dois, alguns resultados de coincidência são estabelecidos a partir da noção de operadores múltiplo somantes. A Desigualdade de Bohnenblust-Hille por exemplo, pode ser inserida neste contexto. O resultado abaixo pode ser obtido a partir do Teorema de Bohnenblust-Hille (3.4) e a Proposição 2.23 .

Corolário 3.5. Dado $m \geq 2$ e $E_1, \ldots, E_m$ espaços de Banach,

$$
\mathcal{L}\left(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}\right) = \prod\nolimits_{\left(\frac{2m}{m+1};1\right)}^{m}\left(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}\right).
$$

Para detalhes veja [7, Theorem 4.3].

3.2 Aplicações da Desigualdade de Hölder com a Bonhenblust-Hille

O objetivo desta seção é exibir algumas aplicações da Desigualdade de Hölder no contexto das normas mistas com o auxílio da Desigualdade de Bohnenblust-Hille. Nesta etapa, fundamentamos nossos estudos no artigo [2]. Na maior parte dos teoremas, conseguimos estimar as desigualdades propostas que se caracterizam como somas mistas, e em seguida, obtemos a otimalidade de cada expoente com a ajuda da Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund.

Os próximos três teoremas são resultados que mostram versões mais rebuscadas da Desigualdade de Hardy-Littlewood. Vale salientar que ela também pode ser compreendida no contexto das normas mistas em espaços de sequências, usufruindo da Desigualdade de Hölder em sua demonstração. Como ela não será o objeto de estudo principal do nosso trabalho, apenas enunciaremos os resultados sem demonstrá-los. Recomendamos ao leitor [5, Theorem 1.2], onde as demonstrações aparecem com mais detalhes.

Teorema 3.6. ***(Desigualdade generalizada de Hardy-Littlewood para*** $p \geq 2m$*)* *Sejam* $m \geq 2$ *um inteiro positivo,* $p \geq 2m$ *e* $s_1, \ldots, s_m \in [\frac{p}{p-m}, 2]$*. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a)

$$\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m} \leq \frac{mp + p - 2m}{2p}$$

(b) Existe $D_{m,s,p}^{\mathbb{K}} \geq 1$ *satisfazendo,*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|A(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{s_m}\right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}}\cdots\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \leq D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||A||\,.$$

Para todo inteiro positivo n *e toda aplicação* m*-linear contínua* $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$*.*

Em conexão com o capítulo anterior, um resultado de coincidência pode ser estabelecido com a Desigualdade de Hardy-Littlewood. Considerando o expoente múltiplo $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_m) \in [\frac{p}{p-m}, 2]^m$ com $\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m} = \frac{mp+p-2m}{2p}$ e $p^* = \frac{p}{p-1}$, obtemos

$$\frac{m}{\mathbf{s}} = \frac{m+1}{2} - \frac{m}{p} \Rightarrow \mathbf{s} = \frac{2mp}{mp + p - 2m}$$

onde $\frac{1}{\mathbf{s}} = \frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m}$. Com isso, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.7. Se $E_1, \ldots, E_m$ são espaços de Banach, então para toda forma $m-$linear contínua $T : E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow \mathbb{K}$ temos

$$\prod\nolimits_{(\mathbf{s};p^*)}^{m}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})\,.$$

Para detalhes veja [7, Proposition 5.7].

Quando $p = \infty$, temos a versão multilinear da Desigualdade de Bohnenblust-Hille. Note que,

$$\lim_{p\to\infty}\left(\frac{mp+p-2m}{2p}\right) = \lim_{p\to\infty} p.\left(\frac{m+1}{2} - \frac{m}{p}\right) = \frac{m+1}{2}.$$

Em [6], os autores trabalham com a versão clássica da Desigualdade de Hardy-Littlewood, levando em consideração que todos os expoentes são iguais. Uma consequência deste fato é o seguinte:

Teorema 3.8. *Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo.*

(a) Se $(r,p) \in ([1,2] \times [2,2m)) \cup ([1,\infty) \times [2m,\infty])$, então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} n^{\max\{\frac{2mr+2mp-mpr-pr}{2pr},0\}} \left|\left|T\right|\right|.$$

Para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente $\max\{\frac{2mr+2mp-mpr-pr}{2pr},0\}$ é ótimo.

(b) Se $(r,p) \in ([2,\infty) \times (m,2m])$, então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} n^{\max\{\frac{p+mr-rp}{pr},0\}} \left|\left|T\right|\right|.$$

Para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente $\max\{\frac{p+mr-rp}{pr},0\}$ é ótimo.

Quando $r = \frac{2m}{m+1}$ e $p = \infty$, temos a Desigualdade de Bohnenblust-Hille e quando $r = \frac{2mp}{mp+p-2m}$ e $p \geq 2m$, recuperamos a Desigualdade Hardy-Littlewood/Praciano-Pereira (Veja [6, Theorem 2], [40]). Por fim, quando $r = \frac{p}{p-m}$e $m < p < 2m$, temos a Desigualdade de Hardy-Littlewood/Dimant-Sevilla-Peris. (Veja [6, Theorem 3]).

No próximo resultado, poderemos aplicar de fato a Desigualdade de Hölder para somas mistas vista no capítulo 1. Nesta etapa, também serão fundamentais as Desigualdades de Kahane-Salem-Zygmund e Bohnenblust-Hille.

Teorema 3.9. *Seja $m \geq 2$ um inteiro positivo.*

(a) Se

$$(r_1,\ldots,r_m,p) \in \left(\left(0,\frac{2m}{m+1}\right]^m \times [2,\infty]\right) \cup \left(\left(0,\frac{2mp}{mp+p-2m}\right]^m \times [2m,\infty]\right)$$

então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} \geq 1$(não dependendo de n) tal que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}\leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}n^{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}}\left|\left|T\right|\right|,$$

para toda forma m-linear $T:\ell_p^n\times\cdots\times\ell_p^n\longrightarrow\mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente* $\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}$ *é ótimo.*

(b) Se

$$(r_1,\ldots,r_m,p)\in\left(\left[\frac{2m}{m+1},2\right]^m\times[2,2m]\right)\cup\left(\left[\frac{2mp}{mp+p-2m},\infty\right)^m\times[2m,\infty)\right)$$

então existe uma constante $D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\geq 1$*(não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}n^{\max\{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m},0\}}\left|\left|T\right|\right|,$$

para toda forma m-linear $T:\ell_p^n\times\cdots\times\ell_p^n\longrightarrow\mathbb{K}$ *e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente* $\max\{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m},0\}$ *é ótimo.*

Demonstração. (a). Suponha que $(r_j,p)\in(0,\frac{2m}{m+1}]\times[2,\infty]$ para todo $j=1,\ldots,m$. Note que, para $p\geq 2$

$$\sup_{\varphi\in B_{(\ell_p^n)'}}\sum_{j=1}^{n}|\varphi(e_j)|=n.n^{\frac{-1}{p^*}}=n^{\frac{1}{p}}.$$

Inicialmente note que $\Psi:(\ell_p^n)'\longrightarrow\ell_{p^*}^n$ dada por $\Psi(\varphi)=(\varphi(e_j))_{j=1}^n$ é um isomorfismo isométrico. De fato,

Como $(e_j)_{j=1}^n$ é base de Schauder para ℓ_p^n, podemos escrever cada elemento $x=(x_j)\in\ell_p^n$ da forma $x=\sum_j e_jx_j$. Assim, dado $\varphi\in\left(\ell_p^n\right)'$ temos

$$\varphi\left(x\right)=\varphi\left(\sum_j e_jx_j\right)=\sum_j x_j\varphi\left(e_j\right).$$

Verifiquemos que Ψ está bem definida e limitada. Para tanto, para cada $j\in\mathbb{N}$ definamos a sequência $\gamma^j=\left(\gamma_k^j\right)_k$ em ℓ_p^n da forma:

$$\gamma_k^j=\begin{cases}\left|\varphi\left(e_k\right)\right|^{p^*}/\varphi\left(e_k\right), \text{ com } \varphi\left(e_k\right)\neq 0 \text{ e } 1\leq k\leq j\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{caso contrário}\end{cases}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j} |\varphi(e_j)|^{p^*} &= \varphi(\gamma^j) \leq ||\varphi|| \,.\, \left|\left|\gamma^j\right|\right|_p \\ &= ||\varphi|| \,.\, \left(\sum_{k=1}^{j} |\varphi(e_j)|^{(p^*-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= ||\varphi|| \,.\, \left(\sum_{k=1}^{j} |\varphi(e_j)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left(\sum_{k=1}^{j} |\varphi(e_j)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq ||\varphi||,$$

ou seja, $(\varphi(e_j))_j \in \ell_{p^*}^n$, assegurando sua boa definição, e além disso,

$$||\Psi(\varphi)|| = ||(\varphi(e_j))||_{p^*} \leq ||\varphi||.$$

A linearidade de Ψ é imediata. Então, dado $x = (x_j) \in \ell_p^n$, utilizando a Desigualdade clássica de Hölder, temos

$$|\varphi(x)| = \left|\sum_j x_j \varphi(e_j)\right| \leq \sum_j |x_j \varphi(e_j)| \leq ||\varphi(e_j)||_{p^*} \,.\, ||x||_p.$$

Com isso concluímos que $||\varphi|| \leq ||(\varphi(e_j))||_{p'} = ||\Psi(\varphi)||$, e portanto, Ψ é uma isometria. Para finalizar, considere $b = (b_j) \in \ell_{p^*}^n$ e defina o funcional $\varphi_b : \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\varphi_b((x_j)) = \sum x_j b_j$. Aplicando novamente a Desigualdade de Hölder clássica, garantimos que φ_b está bem definido e é limitado. Além disso,

$$\Psi(\varphi_b) = (\varphi_b(e_j))_j = (b_j) = b,$$

isto é, Ψ também é sobrejetiva. Agora, fixado $\varphi \in B_{(\ell_p^n)'}$ e usando a Desigualdade de Hölder obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|\right) \leq \left(\sum_{j=1}^{n} 1^p\right)^{\frac{1}{p}} \,.\, \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = n^{\frac{1}{p}},$$

pois

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} = ||(\varphi(e_j))||_{p^*} \overset{\text{isometria}}{=} ||\Psi(\varphi)|| = 1.$$

Tomando o supremo,

$$\sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^n)'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)| \right) \leq n^{\frac{1}{p}}.$$

Por outro lado observe que $\phi = \left(n^{\frac{-1}{p^*}}, \cdots, n^{\frac{-1}{p^*}} \right) \in S_{\ell_{p^*}^n}$, $\phi(e_j) = n^{\frac{-1}{p^*}}$, $j = 1, \ldots, n$, pois

$$||\phi||_{p^*} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{j=1}^{n} |\phi(e_j)|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(n^{\frac{-1}{p^*}} \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(n. \left(n^{\frac{-1}{p^*}} \right)^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} = 1.$$

Além disso, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\phi(e_j)| = \sum_{j=1}^{n} n^{\frac{-1}{p^*}} = n.n^{\frac{-1}{p^*}} = n^{\frac{1}{p}}$. Consequentemente,

$$\sup_{\varphi \in S_{\ell_{p^*}^n}} \sum_{j=1}^{n} |\phi(e_j)| \geq \sum_{j=1}^{n} |\phi(e_j)| = n^{\frac{1}{p}}.$$

Por conseguinte, concluímos que $\sup_{\varphi \in B_{(\ell_p^n)'}} \sum\limits_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)| = n^{\frac{1}{p}}$. Pela Desigualdade multilinear de Bohnenblust-Hille, todas as formas m-lineares são $(\frac{2m}{m+1}; 1)$ múltiplo somante. Veja proposição (2.23) e corolário (3.5). Daí temos,

$$\left(\sum_{i_1, \ldots, i_m = 1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C \, ||T|| \, n^{\frac{m}{p}}.$$

Como $(r_i, p) \in (0, \frac{2m}{m+1}] \times [2, \infty]$, para $i = 1, \ldots, m$, segue que $\frac{1}{r_i} \geq \frac{1}{\frac{2m}{(m+1)}}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Então, podemos tomar $x_1, \ldots, x_m$ tais que

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{\frac{2m}{m+1}} + \frac{1}{x_i}, \text{ para } i = 1, ..., m.$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder para somas mistas (Teorema 1.2) e a Desigualdade de Bohnenblust-Hille acima (Teorema 3.4), temos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\dots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\dots e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}.\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}1^{x_m}\right)^{\frac{x_{m-1}}{x_m}}\cdots\right)^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{\frac{1}{x_1}}$$
$$=\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\dots e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}.n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}}$$
$$\leq C_m\,||T||\,.n^{\frac{m}{p}}.n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}}$$
$$=C_m\,||T||\,.n^{\frac{m}{p}-\frac{m+1}{2}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}}.$$

Agora suponha que $(r_i,p)\in(0,\frac{2mp}{mp+p-2m}]\times[2m,\infty]$ para todo $i=1,\dots,m$. Sejam $x_1,\dots,x_m$ tais que

$$\frac{1}{r_i}=\frac{1}{\frac{2mp}{mp+p-2m}}+\frac{1}{x_i},\text{ para todo } i=1,\dots,m.$$

Usando a Desigualdade de Hölder para somas mistas (Teorema 1.2) e a Desigualdade de Hardy-Littlewood / Praciano-Pereira ([6, Theorem 2], temos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\dots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\dots e_{i_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}}.\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}1^{x_m}\right)^{\frac{x_{m-1}}{x_m}}\cdots\right)^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{\frac{1}{x_1}}$$
$$=\left(\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\dots e_{i_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}}.n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}}$$
$$\leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p}\,||T||\,.n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}}$$
$$=D^{\mathbb{K}}_{m,r,p}\,||T||\,.n^{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}}.$$

Vamos agora obter a otimalidade do expoente acima. Utilizando a Desigualdade generalizada de Kahane-Salem-Zygmund, (Teorema 3.2), obtém-se por indução que,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|A(e_{i_1},\dots,e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}=n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}}.$$

para toda forma m-linear $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Suponhamos então que o resultado seja válido para algum expoente $s > 0$, isto é,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq C_m\,||T||\,.n^s.$$

Considere o operador $T = A$ que satisfaça o Teorema 3.2. Uma vez que $p \geq 2$, segue que

$$n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}} \leq C_m\,||A||\,n^s \leq C_m n^{s+\frac{m+1}{2}-\frac{m}{p}}$$

Ou seja, temos

$$n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}} \leq C_m n^{s+\frac{m+1}{2}-\frac{m}{p}}.$$

E daí,

$$n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}-s-\frac{m+1}{2}+\frac{m}{p}} \leq C_m.$$

Fazendo $n \to \infty$, obtemos $\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}-s-\frac{m+1}{2}+\frac{m}{p} \leq 0$. Consequentemente,

$$\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m} \leq s+\frac{mp+p-2m}{2p}$$

Logo,

$$\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}+\frac{2m-mp-p}{2p} \leq s$$

Portanto, o expoente é ótimo. (b). Suponha que $(r_i, p) \in [\frac{2m}{m+1}, 2] \times [2, 2m]$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Pelo teorema 3.8, uma vez que $2 \leq p \leq 2m$ segue que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\frac{2m-p}{2p}}.$$

Fazendo $r = 2$ no Teorema 3.8 (item a), obtemos,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\max\{\frac{4m+2mp-2mp-2p}{4p},0\}}\\ &\leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\max\{\frac{4m-2p}{4p},0\}}.\end{aligned}$$

Como $2 \leq p \leq 2m$, então $\max\left\{\frac{4m-2p}{4p}, 0\right\} = \frac{4m-2p}{4p} = \frac{2m-p}{2p}$ e segue que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\frac{2m-p}{2p}}.$$

Agora, como $\frac{1}{r_i} \geq \frac{1}{2}$, para $i = 1, ..., m$, consideremos $x_1, \ldots, x_m$ tais que

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x_i}, \text{ para todo } i = 1, ..., m.$$

Novamente, aplicando a Desigualdade de Hölder para somas mistas em espaços ℓ_p (Teorema 1.2), temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots e_{i_m})|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} 1^{x_m} \right)^{\frac{x_{m-1}}{x_m}} \cdots \right)^{\frac{x_1}{x_2}} \right)^{\frac{1}{x_1}} \\
&= \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}} \\
&\leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \left|\left|T\right|\right| .n^{\frac{2m-p}{2p}} .n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}} \\
&= D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \left|\left|T\right|\right| .n^{\frac{2m-p}{2p}-\frac{m}{2}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}} \\
&= D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \left|\left|T\right|\right| .n^{\frac{m}{p}-\frac{m+1}{2}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}} \\
&= D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \left|\left|T\right|\right| .n^{\max\{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m},0\}}.
\end{aligned}$$

Para mostrarmos a otimalidade, suponhamos então que o resultado seja válido para algum expoente $s > 0$, ou seja,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots e_{i_m})|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \left|\left|T\right|\right| .n^s,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Pelo Teorema 3.2, temos

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} |A(e_{i_1}, \ldots e_{i_m})|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}} = n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}},$$

onde $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma forma m-linear que satisfaz o Teorema 3.2. E daí,

$$n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}} \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} \left|\left|A\right|\right| n^s \leq C_m n^{s+\frac{m+1}{2}-\frac{m}{p}}.$$

Assim como no item (a), obtemos

$$s \geq \frac{m}{p} - \frac{m+1}{2} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} = \max\left\{\frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}, 0\right\}.$$

Agora suponha que $(r_i, p) \in [\frac{2mp}{mp+p-2m}, \infty) \times [2m, \infty)$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Neste caso, como $\frac{1}{r_i} \leq \frac{1}{\frac{2mp}{mp+p-2m}}$, pela inclusão canônica em espaços ℓ_p,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}\\
&\leq \left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots,e_{i_m})|^{\frac{2mp}{mp+p-2m}}\right)^{\frac{mp+p-2m}{2mp}}\\
&\leq C\,||T||\,.n^0\\
&= D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\max\left\{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m},0\right\}}.
\end{aligned}$$

Neste caso, garantimos a otimalidade de modo imediato, pois a desigualdade não seria válida se trocássemos $n^{\max\left\{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m},0\right\}}$ por n^s, com $s < 0$. $\square$

Uma versão interessante da Desigualdade de Hardy-Littlewood generalizada ocorre quando

$$\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m} > \frac{mp+p-2m}{2p}.$$

Para tanto, será necessário o auxílio de um lema.

Lema 3.10. Sejam $r_1, \ldots, r_m \in (0, 2]$, $m \geq 2$ um inteiro positivo e $p \geq 2m$. Se

$$\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} > \frac{mp+p-2m}{2p},$$

então existem $s_1, \ldots, s_m \in \left[\frac{p}{p-m}, 2\right]$ tal que $s_j \geq r_j$ para todo $j = 1, \ldots, m$ e

$$\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m} = \frac{mp+p-2m}{2p}.$$

Demonstração. Como $p \geq 2m$, temos

$$1 < \frac{p}{p-m} \leq 2.$$

Iremos dividir nossa prova em dois casos:

Primeiro caso. Suponha que $r_{j_0} \leq \frac{p}{p-m}$ para algum j_0. Neste caso, definamos

$$s_j = 2 \text{ para todo } j \neq j_0$$

e

$$s_{j_0} = \frac{p}{p-m}.$$

Segundo caso. Agora, suponha que $r_j > \frac{p}{p-m}$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Vamos definir para todo $j = 1, \ldots, m$,

$$s_j = r_j + \delta_j$$

com $\delta_1 \geq 0, \ldots, \delta_m \geq 0$ definidos da seguinte forma: (1) Defina $\delta_1 > 0$ tal que $(1a)$ $s_1 := r_1 + \delta_1 \in (\frac{p}{p-m}, 2]$, com

$$\frac{1}{r_1 + \delta_1} + \cdots \frac{1}{r_m} = \frac{mp + p - 2m}{2p}$$

se isso é possível, neste caso $s_j := r_j$ para todo $j = 2, \ldots, m$; $(1b)$ Defina $\delta_1 := 2 - r_1$, caso contrário (2) Defina $\delta_2 > 0$ tal que $(2a)$ $s_2 := r_2 + \delta_2 \in (\frac{p}{p-m}, 2]$ com

$$\frac{1}{r_1 + \delta_1} + \frac{1}{r_2 + \delta_2} \cdots \frac{1}{r_m} = \frac{mp + p - 2m}{2p}$$

se isso é possível, neste caso $s_j := r_j$ para todo $j = 3, \ldots, m$; $(2b)$ $\delta_2 := 2 - r_2$, caso contrário. O processo para em algum estágio ou pode continuar até o caso $m - 1$. Se precisarmos do caso $m - 1$, então podemos definir $((m-1)\,a)$: Defina $\delta_{m-1} > 0$ tal que $s_{m-1} := r_{m-1} + \delta_{m-1} \in (\frac{p}{p-m}, 2]$ e

$$\frac{1}{r_1 + \delta_1} + \cdots + \frac{1}{r_{m-1} + \delta_{m-1}} + \frac{1}{r_m} = \frac{mp + p - 2m}{2p}.$$

Note que isso será possível, pois para $\delta_{m-1} = 2 - r_{m-1}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1 + \delta_1} + \cdots + \frac{1}{r_{m-1} + \delta_{m-1}} + \frac{1}{r_m} &= \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{r_m} \\ &< \frac{1}{2}(m-1) + \frac{p-m}{p} \\ &= \frac{mp + p - 2m}{2p} \end{aligned} \tag{3.2}$$

e será possível ajustar $\delta_{m-1} > 0$ (menor que $2 - r_{m-1}$) de tal maneira que

$$\frac{1}{r_1+\delta_1} + \cdots + \frac{1}{r_{m-1}+\delta_{m-1}} + \frac{1}{r_m} = \frac{mp+p-2m}{2p}.$$

De 3.2 temos

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{r_m} < \frac{mp+p-2m}{2p} \tag{3.3}$$

e do caso $(m-2)$ segue que

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{r_{m-1}} + \frac{1}{r_m} > \frac{mp+p-2m}{2p} \tag{3.4}$$

de 3.3 e 3.4 nós concluímos com um argumento análogo ao do Valor Intermediário que existe $\delta_{m-1} > 0$ tal que $r_{m-1} + \delta_{m-1} < 2$ e

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{r_{m-1}+\delta_{m-1}} + \frac{1}{r_m} = \frac{mp+p-2m}{2p}.$$

Com isso, podemos escolher então

$$\begin{aligned} s_j &= 2 \text{ para todo } j = 1, \ldots, m-2 \\ s_{m-1} &= r_{m-1} + \delta_{m-1} \\ s_m &= r_m. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.11. *Seja $m \geq 2$ um inteiro. Se $(r_j, p) \in [1,2] \times [2m, \infty]$ para todo $j = 1, \ldots, m$, então existe uma constante $D^{\mathbb{K}}_{m,r,p} \geq 1$(não dependendo de n) tal que*

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n} \left(\cdots \left(\sum_{i_m=1}^{n} |T(e_{i_1}, \ldots e_{i_m})|^{r_m} \right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots \right)^{\frac{r_1}{r_2}} \right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq D^{\mathbb{K}}_{m,r,p}.n^{\max\{\frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}, 0\}} \left|\left|T\right|\right|,$$

para toda forma m-linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo n. Além disso, o expoente $\frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}$ é ótimo.

Demonstração. Suponha que

$$\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} > \frac{mp+p-2m}{2p}.$$

Pelo lema anterior, existem $s_1, \ldots, s_m \in \left[\frac{p}{p-m}, 2\right]$ com $s_i \geq r_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$ tais que

$$\frac{1}{s_1} + \cdots + \frac{1}{s_m} = \frac{mp + p - 2m}{2p}.$$

Com isso, considere $x_1, \ldots, x_m$ tais que

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{s_i} + \frac{1}{x_i}, \text{ com } i = 1, \ldots, m.$$

Assim, usando a Desigualdade de Hölder com normas mistas (Teorema 1.2) e o Teorema 3.6 , temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\leq \left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{s_m}\right)^{\frac{s_{m-1}}{s_m}}\cdots\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right)^{\frac{1}{s_1}} \\
&\times \left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}1^{x_m}\right)^{\frac{x_{m-1}}{x_m}}\cdots\right)^{\frac{x_1}{x_2}}\right)^{\frac{1}{x_1}} \\
&\leq D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_m}} \\
&\leq D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}-\left(\frac{1}{s_1}+\cdots+\frac{1}{s_m}\right)} \\
&\leq D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}-\left(\frac{mp+p-2m}{2p}\right)} \\
&\leq D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}+\left(\frac{2m-mp-p}{2p}\right)} \\
&= D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{\max\left\{\frac{2m-mp-p}{2p}+\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m},0\right\}}.
\end{aligned}$$

Vejamos agora a otimalidade do expoente. Suponhamos que a desigualdade seja válida para algum $s > 0$, isto é,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|T(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq D_{m,s,p}^{\mathbb{K}}\,||T||\,.n^{s},$$

para toda forma $m-$linear $T : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Pela Desigualdade de Kahane-Salem-Zygmund, (Teorema 3.2), sabemos que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{n}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{n}|A(e_{i_1},\ldots e_{i_m})|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}} = n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}},$$

para toda forma $m-$linear $A : \ell_p^n \times \cdots \times \ell_p^n \longrightarrow \mathbb{K}$. Consequentemente,

$$n^{\frac{1}{r_1}+\cdots+\frac{1}{r_m}} \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}}\,||A||\,n^s \leq D_{m,r,p}^{\mathbb{K}} n^{s+\frac{m+1}{2}-\frac{m}{p}}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} s &\geq \frac{m}{p} - \frac{m+1}{2} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} \\ &= \frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}. \end{aligned}$$

Por hipótese,

$$\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} > \frac{mp+p-2m}{2p}$$

logo

$$\frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} > 0.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} s &\geq \frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} \\ &= \max\left\{\frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}, 0\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, o expoente $\max\left\{\frac{2m-mp-p}{2p} + \frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m}, 0\right\}$ é ótimo. O caso em que

$$\frac{1}{r_1} + \cdots + \frac{1}{r_m} \leq \frac{mp+p-2m}{2p}$$

é exatamente a versão generalizada de Hardy-Littlewood. (Teorema 3.6). $\square$

3.3 Aplicações da Desigualdade de Hölder interpolativa

No capítulo 1, exibimos um corolário imediato da Desigualdade de Hölder com normas mistas. Do ponto de vista da teoria de interpolação, o resultado não é muito complicado, mas extremamente importante nas aplicações tão quanto a própria Desigualdade de Hölder. No contexto multilinear por exemplo, as desigualdades clássicas de

Bonhenblust-Hille e a Hardy-Littlewood ganharam outros patamares com a descoberta deste resultado. De maneira surpreendente, conseguimos demonstrar estas desigualdades por meio da interpolação dos expoentes. Mostraremos alguns casos particulares e os casos mais gerais são análogos.

Exemplo 3.1. Consideremos o caso $m = 2$ na Desigualdade de Bonhenblust-Hille, mais conhecida como Desigualdade $\frac{4}{3}$ de Littlewood. Ela nos assegura que existe uma constante $C_2^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1, i_2 = 1}^{N} \left| T\left(e_{i_1}, e_{i_2}\right) \right|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq C_2. \left|\left|T\right|\right|,$$

para toda aplicação bilinear $T : c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ e todo inteiro positivo N. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ já é conhecido que $C_2 = \sqrt{2}$.

Utilizando o corolário de Hölder, o expoente $\frac{4}{3}$ pode ser obtido por meio de múltipla interpolação dos expoentes da seguinte desigualdade

$$\left(\sum_{i_1 = 1}^{N} \left(\sum_{i_2 = 1}^{N} \left| T\left(e_{i_1}, e_{i_2}\right) \right|^{q_2} \right)^{\frac{q_1}{q_2}} \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C. \left|\left|T\right|\right|$$

com $(q_1, q_2) = (1, 2)$ e $(2, 1)$. Pelo corolário, $q(1) = (1, 2)$ e $q(2) = (2, 1)$. E daí,

$$\left(\frac{1}{\frac{4}{3}}, \frac{1}{\frac{4}{3}} \right) = \theta_1. \left(\frac{1}{q_1(1)}, \frac{1}{q_2(1)} \right) + \theta_2. \left(\frac{1}{q_1(2)}, \frac{1}{q_2(2)} \right).$$

Ou seja,

$$\left(\frac{1}{\frac{4}{3}}, \frac{1}{\frac{4}{3}} \right) = \theta_1. \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2} \right) + \theta_2. \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right), \text{ onde } \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

Reorganizando, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{1}{\frac{4}{3}} = \theta_1 + \frac{\theta_2}{2} \\ \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{\theta_1}{2} + \theta_2 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2}$. Assim, aplicando o corolário de Hölder (1.3) temos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{q_2}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}}\\
&\leq\left[\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{q_2(1)}\right)^{\frac{q_1(1)}{q_2(1)}}\right)^{\frac{1}{q_1(1)}}\right]^{\theta_1}\\
&\times\left[\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{q_2(2)}\right)^{\frac{q_1(2)}{q_2(2)}}\right)^{\frac{1}{q_1(2)}}\right]^{\theta_2}.
\end{aligned}$$

Isto significa mais precisamente que,

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{4}{3}.\frac{3}{4}}\right)^{\frac{3}{4}}\\
&\leq\left[\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{1}}\right]^{\frac{1}{2}}.\left[\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{1}\right)^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

No entanto, a Desigualdade de Khinchine nos fornece que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\leq\sqrt{2}.\left\|T\right\|.$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.3, temos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{1}\right)^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{1}{2}} &\leq\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{1}}\\
&\overset{\text{Khinchine}}{\leq}\sqrt{2}.\left\|T\right\|.
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{4}{3}.\frac{3}{4}}\right)^{\frac{3}{4}} &\leq\left(\sqrt{2}.\left\|T\right\|\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\sqrt{2}.\left\|T\right\|\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\sqrt{2}.\left\|T\right\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\sum_{i_1,i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2}\right)\right|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}}\right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2}.\left|\left|T\right|\right|.$$

Exemplo 3.2. Analisemos o caso $m=3$ da Desigualdade de Bohnenblust-Hille. Ela nos diz que existe uma constante $C_3^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que, para toda aplicação 3-linear $T: c_0 \times c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$,

$$\left(\sum_{i_1,i_2,i_3=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3}\right)\right|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \leq C_3.\left|\left|T\right|\right|,$$

para todo inteiro positivo N.

De maneira análoga, o expoente $\frac{3}{2}$ pode ser obtido por meio de múltipla interpolação dos expoentes

$$\begin{aligned}(q_1,q_2,q_3) &= (1,2,2)\,,(2,1,2)\ \text{ e }\ (2,2,1)\ \text{ ou}\\ (q_1,q_2,q_3) &= \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},2\right),\left(\frac{4}{3},2,\frac{4}{3}\right)\ \text{ e }\ \left(2,\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)\end{aligned}$$

na desigualdade

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\sum_{i_2=1}^{N}\left(\sum_{i_3=1}^{N}\left|T\left(e_{i_1},e_{i_2},e_{i_3}\right)\right|^{q_3}\right)^{\frac{q_2}{q_3}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq C.\left|\left|T\right|\right|.$$

Antes de aplicarmos o corolário de Hölder, vejamos algumas consequências da Desigualdade de Khinchine que serão fundamentais na demonstração deste caso.

Proposição 3.12. Seja $T: c_0 \times c_0 \times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ aplicação 3-linear limitada. Então:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\left|\left|T\right|\right|.$$

Demonstração. Aplicando a Desigualdade de Khinchine para $p = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}}\\
&\leq \left[\sum_{i=1}^{N}(A_1^{-1})^{m-1}\left(\int_0^1\left|\sum_{j,k=1}^{N}r_j(t_j).r_k(t_k).T(e_i,e_j,e_k)\right|^1\right)^{\frac{1}{1}.1} dt_j.dt_k\right]^{\frac{1}{1}}\\
&= (A_1^{-1})^{m-1}\int_0^1\sum_{i=1}^{N}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{N}r_j(t_j)e_j,\sum_{k=1}^{N}r_k(t_k)e_k)\right| dt_j.dt_k\\
&\leq (\sqrt{2})^{m-1}\sup_{t_j,t_k\in\,[0,1]}\sum_{i=1}^{N}\left|T(e_i,\sum_{j=1}^{N}r_j(t_j)e_j,\sum_{k=1}^{N}r_k(t_k)e_k)\right|\\
&\leq (\sqrt{2})^{m-1}\sup_{t_j,t_k\in\,[0,1]}\left|\left|T(.,\sum_{j=1}^{N}r_j(t_j)e_j,\sum_{k=1}^{N}r_k(t_k)e_k)\right|\right|.\left|\left|(e_i)\right|\right|_{w,1}\\
&\leq (\sqrt{2})^{m-1}\left|\left|T\right|\right|.\underbrace{\left|\left|\sum_{j=1}^{N}r_j(t_j)e_j\right|\right|}_{1}.\underbrace{\left|\left|\sum_{k=1}^{N}r_k(t_k)e_k\right|\right|}_{1}.\underbrace{\left|\left|(e_i)\right|\right|_{w,1}}_{1}\\
&= (\sqrt{2})^{m-1}\left|\left|T\right|\right|.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\left|\left|T\right|\right|.$$

Neste caso, como $m = 3$, obtemos o resultado almejado, isto é,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\left|\left|T\right|\right|.$$

□

Com essa ferramenta em mãos, inúmeras desigualdades semelhantes a esta podem ser obtidas permutando os índices i, j, k. Um procedimento análogo utilizando a Desigualdade de Khinchine garante que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\left|\left|T\right|\right|.$$

Com isso, podemos obter as seguintes desigualdades que iremos utilizar como ferramentas para estimar outras mais complicadas.

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\,||T|| \tag{3.5}$$

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\,||T|| \tag{3.6}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\,||T|| \tag{3.7}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \leq (\sqrt{2})^2\,||T|| \ . \tag{3.8}$$

A partir dessas desigualdades, queremos estimar a seguinte:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.9}$$

Em (3.9), aplicando o Teorema 3.3 para os índices i,j temos:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \overset{\text{por } 3.6}{\leq} (\sqrt{2})^2.\,||T||\,.$$

Portanto,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\sqrt{2})^2.\,||T||\,.$$

Vejamos agora a seguinte desigualdade:

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^1\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\sqrt{2})^2.\,||T||\,.$$

Aplicando 3.3 para os índices j,k obtemos:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^1\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Novamente, aplicando 3.3 para i,k temos:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}.1}\right)^{\frac{1}{1}} \overset{\text{Por(3.7)}}{\leq} (\sqrt{2})^2.\,||T||\,.\end{aligned}$$

E daí,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^1\right)^{\frac{1}{1}.2}\right)^{\frac{1}{2}.2}\right)^{\frac{1}{2}} \leq (\sqrt{2})^2.\,||T||\,.$$

Dessa forma, a Desigualdade de Khinchine nos assegura que

$$\left(\sum_{i_1=1}^{N}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{N}|T\left(e_{i_1},\ldots,e_{i_m}\right)|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\cdots\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq (\sqrt{2})^{m-1}\,||T||\,,$$

com

$$(q_1,\ldots,q_m) = (1,2,\ldots,2)\,.$$

Usando o Teorema 3.3, é possível obter as mesmas estimativas para os expoentes

$$(q_1,\ldots,q_m) = (2,1,\ldots,2)\,,\ldots,(2,2,\ldots,1)\,.$$

Voltemos então ao exemplo. Aplicando o corolário de Hölder (1.3) com

$$\begin{aligned} q(1) &= (1,2,2) \\ q(2) &= (2,1,2) \\ q(3) &= (2,2,1) \end{aligned}$$

segue que

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{3}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{q_3(k)}\right)^{\frac{q_2(k)}{q_3(k)}}\right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}}\right)^{\frac{1}{q_1(k)}}\right]^{\theta_k}.$$

Assim,

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leq \left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{2}\right)^{\frac{2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{1}\right]^{\theta_1}$$

$$\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\theta_2}$$

$$\cdot\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{1}\right)^{\frac{2}{1}}\right)^{\frac{2}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\theta_3}.$$

Pelos resultados anteriores,

$$\left(\sum_{i,j,k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \overset{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\leq \left(\left(\sqrt{2}\right)^2.\,||T||\right)^{\theta_1}.\left(\left(\sqrt{2}\right)^2.\,||T||\right)^{\theta_2}.\left(\left(\sqrt{2}\right)^2.\,||T||\right)^{\theta_3}.$$

Como $\theta_1+\theta_2+\theta_3=1$ segue que,

$$\left(\sum_{i,j,k=1}^{N}|T(e_i,e_j,e_k)|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \leq \left(\sqrt{2}\right)^2.\,||T||\,.$$

Vejamos o caso geral da Bohnenblust-Hille com o auxílio do corolário de Hölder interpolativo. A desigualdade nos diz que dado inteiro $m \geq 1$, existe uma constante $C_m^{\mathbb{K}} \geq 1$ tal que

$$\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty}|T\left(e_{i_1},\ldots e_{i_m}\right)|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m.\,||T||\,,$$

Para toda aplicação $m-$linear contínua $T : c_0\times\cdots\times c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$. De fato, consideremos $r=(r_1,\ldots,r_m)\in(0,\infty]^m$, com $r_i=\frac{2m}{m+1}$, $\forall\ i=1,\ldots,m$ e seja $q\,(k)=\left(\frac{2m-2}{m},\ldots,2,\ldots,\frac{2m-2}{m}\right)$, com 2 na $k-$ésima posição, $k=1,\ldots,N$. Considerando $\theta_k=\frac{1}{m}$, para todo k, podemos escrever $\left(\frac{1}{r_1},\ldots,\frac{1}{r_m}\right)$ na envoltória convexa de $\left(\frac{1}{q_1(k)},\ldots,\frac{1}{q_m(k)}\right)$, para $k=1,\ldots,N$. Ou seja,

$$\frac{1}{\frac{2m}{m+1}}=(m-1)\,.\frac{1}{m}.\frac{1}{\frac{2m-2}{m}}+\frac{1}{m}.\frac{1}{2}.$$

Aplicando o corolário (1.3) obtemos,

$$\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|T\left(e_{i_1},\ldots e_{i_m}\right)|^{r_m}\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_1}{r_2}}\right)^{\frac{1}{r_1}}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}|T\left(e_{i_1},\ldots e_{i_m}\right)|^{q_m(k)}\right)^{\frac{q_{m-1}(k)}{q_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{q_1(k)}{q_2(k)}}\right)^{\frac{1}{q_1(k)}}\right]^{\theta_k}.$$

Com o auxílio do teorema 3.3 e a Desigualdade de Khinchine, temos

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{\infty} \left|T\left(e_{i_1},\ldots e_{i_m}\right)\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \\
&\leq \prod_{k=1}^{N}\left[\sum_{i_1=1}^{\infty}\left(\cdots\left(\sum_{i_m=1}^{\infty}\left|T\left(e_{i_1},\ldots e_{i_m}\right)\right|^{2}\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2m-2}{m}}\cdots\right)^{\frac{m}{2m-2}}\right]^{\theta_k} \\
&\leq \left(C_m.\left|\left|T\right|\right|\right)^{\theta_1+\cdots\theta_N} \\
&= C_m.\left|\left|T\right|\right|.
\end{aligned}
$$

Apêndice

Com o intuito de tornar o trabalho mais completo, dedicaremos esta seção para demonstrar alguns resultados que foram cruciais durante o seu desenvolvimento. Além disso, como mencionamos no capítulo 1, exibiremos o nosso principal resultado conhecido como Desigualdade de Hölder com normas mistas envolvendo o espaço das funções mensuráveis. Neste resultado, o leitor perceberá que a ideia da prova é exatamente a mesma que foi mostrada no referido capítulo para o espaço de sequências, á exceção de pequenas modificações.

Teorema 3.13. ***(Desigualdade de Hölder com normas mistas)*** *Sejam* $\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_m) \in (0, +\infty]^m$ *e* $\mathbf{p}(1) = (p_1(1), ...p_m(1)), \cdots, \mathbf{p}(N) = (p_1(N), \cdots p_m(N)) \in (0, +\infty]^m$ *tal que*

$$\frac{1}{r_j} = \frac{1}{p_j(1)} + ... + \frac{1}{p_j(N)}, \text{ para } j = 1, ..., m. \tag{3.10}$$

Se $f_k \in L_{p(k)}(\mathbf{X})$*, para* $k = 1, ..., N$ *, então* $f_1 f_2 \cdots f_N \in L_{\mathbf{r}}(\mathbf{X})$ *e, além disso,*

$$||f_1 f_2 \cdots f_N||_{\mathbf{r}} \leq ||f_1||_{\mathbf{p}(1)} \cdots ||f_N||_{\mathbf{p}(N)}$$

Demonstração. Procederemos usando indução sobre m. Por simplicidade de notação, consideraremos apenas o caso em que $\mathbf{p}(k) \in (0, \infty)^m$, para $k = 1, \ldots, N$. Note que para $m = 1$, temos a versão clássica da Desigualdade de Hölder. Analisemos o caso $m = 2$. Sejam $f_k(x_1, x_2) \in L_{(p_1(k), p_2(k))}(\mathbf{X})$, $k = 1, ..., N$ funções mensuráveis, $r = (r_1, r_2) \in (0, \infty]^2$ e

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{p_1(1)} + \cdots \frac{1}{p_1(N)} \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{p_2(1)} + \cdots \frac{1}{p_2(N)} \tag{3.12}$$

Para todo x_1 fixo, por hipótese, $f_1(x_1, \cdot) \in L_{p_2(1)}(X_2), \ldots, f_N(x_1, \cdot) \in L_{p_2(N)}(X_2)$. Por 3.12 e pela Desigualdade de Hölder, segue que $(f_1(x_1, \cdot) \cdots f_N(x_1, \cdot)) \in L_{r_2}(X_2)$

e, além disso,

$$||f_1(x_1,\cdot)\cdots f_N(x_1,\cdot)||_{r_2} \le ||f_1(x_1,\cdot)||_{p_2(1)}\cdots ||f_N(x_1,\cdot)||_{p_2(N)}.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{X_2} |f_1(x_1,\cdot)\cdots f_N(x_1,\cdot)|^{r_2}\, d\mu_2\right)^{\frac{1}{r_2}} \\
&\le \left(\int_{X_2} |f_1(x_1,\cdot)|^{p_2(1)}\, d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2(1)}} \cdots \left(\int_{X_2} |f_N(x_1,\cdot)|^{p_2(N)}\, d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2(N)}}.
\end{aligned}$$

Definamos $g_k : X_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$g_k(x_1) = \left(\int_{X_2} |f_k(x_1,\cdot)|^{p_2(k)}\, d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2(k)}} \stackrel{\text{def}}{=} ||f_k(x_1,\cdot)||_{p_2(k)}$$

com $k = 1,...,N$. Ou seja, $g_k \in L_{p_1(k)}(X_1)$. Elevando ambos os membros da desigualdade a r_1, integrando em X_1, e em seguida elevando ambos os membros a $\frac{1}{r_1}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f_1(x_1,\cdot)\cdots f_N(x_1,\cdot)|^{r_2}\, d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{r_2}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\le \left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f_1(x_1,\cdot)|^{p_2(1)}\, d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{p_2(1)}} \cdots \left(\int_{X_2} |f_N(x_1,\cdot)|^{p_2(N)}\, d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{p_2(N)}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
||f_1\cdots f_N||_{(r_1,r_2)} &= \left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2} |f_1(x_1,\cdot)\cdots f_N(x_1,\cdot)|^{r_2}\, d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{r_2}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}} \\
&\le \left[\int_{X_1}\prod_{k=1}^{N}\left[\left(\int_{X_2} |f_k(x_1,\cdot)|^{p_2(k)}\right)^{\frac{1}{p_2(k)}} d\mu_2\right]^{r_1} d\mu_1\right]^{\frac{1}{r_1}} \\
&= \left[\int_{X_1}\left[\prod_{k=1}^{N} g_k(x_1)\right]^{r_1} d\mu_1\right]^{\frac{1}{r_1}} = \left[\int_{X_1} [g_1(x_1)\cdots g_N(x_1)]^{r_1}\, d\mu_1\right]^{\frac{1}{r_1}}.
\end{aligned}$$

Uma vez que cada função mensurável $g_k(x_1) \in L_{p_1(k)}(X_1)$, $k = 1, ..., N$, podemos então aplicar a Desigualdade de Hölder usando (3.11)

$$\left[\int_{X_1} \left[g_1(x_1) \cdots g_N(x_1)\right]^{r_1} d\mu_1\right]^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \left(\int_{X_1} |g_1(x_1)|^{p_1(1)} d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1(1)}} \cdots \left(\int_{X_1} |g_N(x_1)|^{p_1(N)} d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1(N)}}.$$

Logo,

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_1(x_1, \cdot) \cdots f_N(x_1, \cdot)|^{r_2} d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{r_2}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}} \leq \left[\int_{X_1} \left[g_1(x_1) \cdots g_N(x_1)\right]^{r_1} d\mu_1\right]^{\frac{1}{r_1}}.$$

Por conseguinte,

$$\left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_1(x_1, \cdot) \cdots f_N(x_1, \cdot)|^{r_2} d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{r_2}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq \prod_{k=1}^{N} \left(\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f_k(x_1, \cdot)|^{p_2(k)} d\mu_2\right)^{\frac{p_1(k)}{p_2(k)}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1(k)}}.$$

Pela definição de norma mista obtemos:

$$||f_1 \cdots f_N||_{(r_1, r_2)} \leq ||f_1||_{(p_1(1), p_2(1))} \cdots ||f_N||_{(p_1(N), p_2(N))}.$$

Logo,

$$||f_1 \cdots f_N||_{\mathbf{r}} \leq ||f_1||_{\mathbf{p}(1)} \cdots ||f_N||_{\mathbf{p}(N)}.$$

Dadas $f_1 \in L_{\mathbf{p}(1)}, \ldots, f_N \in L_{\mathbf{p}(N)}$, suponhamos por hipótese, que o resultado seja válido para $m - 1$. Mostremos que o mesmo é válido para m. Fixemos $x_1 \in X_1$. Pela definição dos espaços $L_{\mathbf{p}}(\mathbf{X})$ com norma mista, segue que

$$f_k^{x_1} \stackrel{\text{def}}{=} f_k(x_1, \cdot, \cdots, \cdot) \in L_{(p_2(k), \ldots, p_m(k))}(\mathbf{X}), \text{ para } k = 1, ..., N.$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder com a equação 3.10, para $j = 2, \ldots, m$, pela hipótese de indução garantimos que

$$\left(f_1^{x_1} \cdots f_N^{x_1}\right) \in L_{(r_2,\ldots,r_m)}\left(\mathbf{X}\right),$$

e, além disso,

$$||f_1^{x_1} \cdots f_N^{x_1}||_{(r_2,\ldots,r_m)} \leq \prod_{k=1}^{N} ||f_k\left(x_1, \cdot, \cdots, \cdot\right)||_{(p_2(k),\ldots,p_m(k))}.$$

Ou seja,

$$\left(\int_{X_2} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |f_1^{x_1} \cdots f_N^{x_1}|^{r_m}\, d\mu_m\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}} d\mu_2\right)^{\frac{1}{r_2}} \tag{3.13}$$

$$\leq \prod_{k=1}^{N} \left(\int_{X_2} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |f_k^{x_1}|^{p_m(k)}\, d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}} \cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}} d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2(k)}}$$

Definamos $g_k : X_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, $k = 1, ..., N$ por,

$$g_k\left(x_1\right) = \left(\int_{X_2} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |f_k^{x_1}|^{p_m(k)}\, d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}} \cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}} d\mu_2\right)^{\frac{1}{p_2(k)}} \stackrel{\text{def}}{=} ||f_k^{x_1}||_{(p_2(k),\ldots,p_m(k))}.$$

Com isso,

$$\left(\int_{X_2} \left(\cdots \left(\int_{X_m} |f_1^{x_1} \cdots f_N^{x_1}|^{r_m}\, d\mu_m\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}} \cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}} d\mu_2\right)^{\frac{1}{r_2}}$$

$$\leq g_1\left(x_1\right) \cdots g_N\left(x_1\right) = \left|g_1\left(x_1\right) \cdots g_N\left(x_1\right)\right|.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade 3.13 a r_1, integrando em X_1, e em seguida elevando ambos os membros a $\frac{1}{r_1}$ obtemos,

$$\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}\left(\cdots\left(\int_{X_m}\left|f_1^{x_1}\cdots f_N^{x_1}\right|^{r_m}d\mu_m\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}}d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{r_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq\left(\int_{X_1}\left|g_1(x_1)\cdots g_N(x_1)\right|^{r_1}d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Note que para cada $k=1,...,N$, cada função mensurável $g_k(x_1)\in L_{p_1(k)}(X_1)$. Então, aplicando a Desigualdade de Hölder com (3.11) temos o seguinte:

$$\left[\int_{X_1}\left[\prod_{k=1}^{N}g_k(x_1)\right]^{r_1}d\mu_1\right]^{\frac{1}{r_1}}\leq\left(\int_{X_1}\left|g_1(x_1)\right|^{p_1(1)}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1(1)}}\cdots\left(\int_{X_1}\left|g_N(x_1)\right|^{p_1(N)}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1(N)}}.$$

Isto significa mais precisamente que,

$$\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}\left(\cdots\left(\int_{X_m}\left|f_1^{x_1}\cdots f_N^{x_1}\right|^{r_m}d\mu_m\right)^{\frac{r_{m-1}}{r_m}}\cdots\right)^{\frac{r_2}{r_3}}d\mu_2\right)^{\frac{r_1}{r_2}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{r_1}}$$
$$\leq\prod_{k=1}^{N}\left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}\left(\cdots\left(\int_{X_m}\left|f_k^{x_1}\right|^{p_m(k)}d\mu_m\right)^{\frac{p_{m-1}(k)}{p_m(k)}}\cdots\right)^{\frac{p_2(k)}{p_3(k)}}d\mu_2\right)^{\frac{p_1(k)}{p_2(k)}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p_1(k)}}.$$

Portanto, pela definição de norma mista, segue que,

$$\begin{aligned}||f_1\cdots f_N||_{\mathbf{r}}&=||f_1\cdots f_N||_{(r_1,\ldots,r_m)}\\&\leq||f_1||_{(p_1(1),\ldots,p_m(1))}\cdots||f_N||_{(p_1(N),\ldots,p_m(N))}\\&=||f_1||_{\mathbf{p}(1)}\cdots||f_N||_{\mathbf{p}(N)}.\end{aligned}$$

□

Lema 3.14. Seja $1<p<\infty$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_p^w(E)$, $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_{p^*}$ e $S_n\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$. Então $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ converge. Quando $p=1$, o mesmo ocorre para $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\ell_1^w(E)$ e $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\in c_0$.

Demonstração. Para tanto, vamos usar o critério de Cauchy para séries. Considere

$m, n \in \mathbb{N}$. Para $n > m$ temos:

$$||S_n - S_m|| \overset{\text{def}}{=} \left|\left|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i x_i\right|\right|.$$

Pelo teorema de Hahn-Banach , sabemos que

$$\left|\left|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i x_i\right|\right| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right|.$$

A linearidade de φ nos garante que

$$||S_n - S_m|| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i x_i\right)\right| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i \varphi(x_i)|\right).$$

Pela Desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i \varphi(x_i)|\right) &\leq \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} . \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{i=m+1}^{n} |\alpha_i|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} . ||(x_n)_{n=1}^{\infty}||_{p,w} . \end{aligned}$$

como $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$, pelo critério de Cauchy $S_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ converge.

Vejamos o caso $p = 1$. Como $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\alpha_n| < \epsilon, \forall n \geq N.$$

Com isso, considerando $n > m > N$ temos

$$||S_n - S_m|| \overset{\text{def}}{=} \left|\left|\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i x_i\right|\right|.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i x_i\right\| &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left|\varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i x_i\right)\right| \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\sum_{i=m+1}^{n}\left|\alpha_i\varphi\left(x_i\right)\right| \\
&\leq \sup_{i\geq m+1}\left|\alpha_i\right|\sup_{\varphi\in B_{E'}}\sum_{i=m+1}^{n}\left|\varphi\left(x_i\right)\right| \\
&\leq \sup_{i\geq m+1}\left|\alpha_i\right|\sup_{\varphi\in B_{E'}}\sum_{i=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_i\right)\right| \\
&\leq \epsilon\left|\left|\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}\right|\right|_{1,w}.
\end{aligned}$$

Ou seja, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, e portanto, converge. Logo, $S_n = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$ converge.

□

Lema 3.15. A correspondência $u \to \left(ue_n\right)_n$ define um isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}\left(\ell_{p^*}, E\right)$ em $\ell_p^w\left(E\right)$ quando $1 < p < \infty$. Para $p = 1$, o isomorfismo isométrico é de $\mathcal{L}\left(c_0, E\right)$ em $\ell_1^w\left(E\right)$.

Demonstração. Consideremos inicialmente o caso $1 < p < \infty$. Seja $\Psi : \mathcal{L}\left(\ell_{p^*}, E\right) \longrightarrow \ell_p^w\left(E\right)$ a correspondência definida por

$$\Psi\left(u\right) = \left(ue_n\right)_n.$$

Note que Ψ é claramente linear, pois, dados $u_1, u_2 \in \mathcal{L}\left(\ell_{p^*}, E\right)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos:

$$\begin{aligned}
\Psi\left(u_1 + \lambda u_2\right) &= \left(\left(u_1 + \lambda u_2\right)e_n\right)_n \\
&= \left(\left(u_1 e_n\right) + \left(\lambda u_2 e_n\right)\right)_n \\
&= \left(u_1 e_n\right)_n + \lambda\left(u_2 e_n\right)_n \\
&\overset{\text{def}}{=} \Psi\left(u_1\right) + \lambda\Psi\left(u_2\right).
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que Ψ está bem definida. De fato, observe que $\left(e_n\right)_n \in \ell_p^w\left(\ell_{p^*}\right)$ e $\left|\left|\left(e_n\right)_n\right|\right|_{p,w} = 1$, uma vez que dado $\varphi \in \left(\ell_{p^*}\right)'$, é sempre possível enxergá-lo como uma sequência $\left(\varphi\left(e_n\right)\right)_n$ em ℓ_p através da identificação natural existente entre os referidos espaços. E daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi\left(e_n\right)\right|^p \overset{\text{def}}{=} \left|\left|\varphi\left(e_n\right)\right|\right|_p^p \overset{\text{isometria}}{=} \left|\left|\varphi\right|\right|^p < \infty.$$

Além disso, dado $f \in E'$ note que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(ue_n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |(f \circ u)(e_n)|^p < \infty,$$

onde a finitude é possível pelo fato de que $(f \circ u) : \ell_{p^*} \xrightarrow{u} E \xrightarrow{f} \mathbb{K} \in \left(\ell_{p^*}\right)'$ e $(e_n)_n \in \ell_p^w\left(\ell_{p^*}\right)$. Decorre daí que $(f(ue_n))_n \in \ell_p$, isto é, $(ue_n)_n \in \ell_p^w(E)$. Logo, Ψ está bem definida.

Vejamos a sobrejetividade de Ψ. Considere $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e o operador $u : \ell_{p^*} \longrightarrow E$ definido por

$$u\left((\alpha_n)\right)_{n=1}^{\infty} = \sum_n \alpha_n x_n.$$

O lema anterior (3.14) nos garante que u está bem definido. Claramente u é linear, pois, tomando $(\alpha_n)_n$, $(\beta_n)_n \in \ell_{p^*}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ obtém-se:

$$\begin{aligned}
u\left((\alpha_n)_n + (\lambda\beta_n)_n\right) &= u\left((\alpha_n + \lambda\beta_n)_n\right) \\
&= \sum_n (\alpha_n + \lambda\beta_n)\, x_n \\
&= \sum_n \alpha_n x_n + \lambda\beta_n x_n \\
&= \sum_n \alpha_n x_n + \lambda \sum_n \beta_n x_n \\
&\overset{\text{def}}{=} u(\alpha_n) + \lambda u(\beta_n).
\end{aligned}$$

Além disso, u é limitado, pois,

$$||u\left((\alpha_n)\right)_{n=1}^{\infty}|| = \left|\left|\sum_n \alpha_n x_n\right|\right| \overset{\text{Hahn-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_n \alpha_n x_n\right)\right| \overset{\varphi \in E'}{=} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\sum_n \alpha_n \varphi(x_n)\right|.$$

No entanto, pela desigualdade triangular tem-se que,

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\sum_n \alpha_n \varphi(x_n)\right| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_n |\alpha_n \varphi(x_n)|.$$

Como $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}$ e $(\varphi(x_n))_n \in \ell_p$, aplicando a Desigualdade de Hölder segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_n |\alpha_n \varphi(x_n)| &\leq ||(\alpha_n)||_{p^*} . \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_n |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||(\alpha_n)||_{p^*} . ||(x_n)||_{p,w}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$||u\left(\alpha_n\right)|| \leq ||(\alpha_n)||_{p^*} . ||(x_n)||_{p,w} .$$

Com isso, concluímos que $u \in \mathcal{L}\left(\ell_{p^*}, E\right)$ e que $\Psi\left(u\right) = x$, determinando a sobrejetividade de Ψ. Para concluirmos a demonstração, verificaremos que Ψ preserva a norma. De fato,

$$||\Psi\left(u\right)|| = ||\left(ue_n\right)_n||_{p,w} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in B_{E'}} ||\left(\varphi\left(ue_n\right)_n\right)||_p \overset{\text{H-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\phi \in B_{(\ell_p)'}} \left|\phi\left(\varphi\left(ue_n\right)_n\right)\right| .$$

Como $(\ell_p)'$ e ℓ_{p^*} são isometricamente isomorfos, isto nos permite que,

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{\phi \in (\ell_p)'} \left|\phi\left(\varphi\left(u.e_n\right)_n\right)\right| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p^*}}} \left|\sum_n \alpha_n \varphi\left(ue_n\right)\right| .$$

Pelo lema anterior, (3.14), $\sum_{n=1}^{k} \alpha_n u e_n$ converge. Pela continuidade de φ e pela definição de u, tem-se,

$$\left|\sum_n \alpha_n \varphi\left(ue_n\right)\right| = \left|\varphi\left(u\left(\alpha_n\right)\right)\right| .$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}} \left|\sum_n \alpha_n \varphi\left(u.e_n\right)\right| &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p^*}}} \left|\varphi\left(u.\left(\alpha_n\right)\right)\right| \\
&= \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p^*}}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(u.\left(\alpha_n\right)\right)\right| \\
&\overset{\text{H-Banach}}{=} \sup_{(\alpha_n)_n \in B_{\ell_{p^*}}} ||u.\left(\alpha_n\right)|| \\
&\overset{\text{def}}{=} ||u|| .
\end{aligned}$$

Consequentemente, $||\Psi\left(u\right)|| = ||u||$ e Portanto, Ψ é isometria.

Tratemos agora o caso $p = 1$. Seja

$$\Psi : \mathcal{L}\left(c_0, E\right) \longrightarrow \ell_1^w\left(E\right)$$

definido por

$$\Psi\left(u\right) = \left(u.e_n\right)_n$$

Análogo ao caso anterior, é fácil ver que Ψ é linear. Note que Ψ está bem definida, pois, dado $\varphi \in E'$ temos,

$$\sum_n |\varphi(ue_n)| = \sum_n |\varphi \circ u(e_n)| < \infty$$

onde a finitude é justificada pelo lema (3.14), já que $\varphi \circ u : c_0 \xrightarrow{u} E \xrightarrow{\varphi} \mathbb{K} \in (c_0)'$ e $(e_n)_n \in \ell_1^w(c_0)$. Ou seja, $(ue_n)_n \in \ell_1^w(E)$, caracterizando a boa definição de Ψ. Constatemos que Ψ é sobrejetiva e limitada. De fato, seja $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1^w(E)$ e considere $u \in \mathcal{L}(c_0, E)$ definido por

$$u((\alpha_n)_{n=1}^\infty) = \sum_n \alpha_n x_n.$$

Novamente pelo lema (3.14), garantimos que u está bem definido. Além disso,

$$\begin{aligned}
||u((\alpha_n)_{n=1}^\infty)|| = \left\|\sum_n \alpha_n x_n\right\| &\overset{\text{H-Banach}}{=} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_n \alpha_n x_n\right)\right| \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_n |\alpha_n \varphi(x_n)|\right) \\
&\leq ||(\alpha_n)_{n=1}^\infty||_{c_0} \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_n |\varphi(x_n)|\right) \\
&\overset{\text{def}}{=} ||(\alpha_n)_{n=1}^\infty||_{c_0} \cdot ||(x_n)_{n=1}^\infty||_{1,w}
\end{aligned}$$

assegurando que u é limitado, $\Psi(u) = x$ e que Ψ é sobrejetiva. Agora, vejamos que Ψ preserva a norma.

$$\begin{aligned}
||\Psi(u)||_{1,w} &= ||(ue_n)||_{1,w} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_n |\varphi(ue_n)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_n |\varphi \circ u(e_n)| \\
&= ||u|| \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_n \left|\frac{\varphi \circ u}{||u||}(e_n)\right| \\
&\leq ||u|| \cdot \sup_{\Phi \in B_{(c_0)'}} \sum_n |\Phi(e_n)| \\
&\overset{\text{def}}{=} ||u|| \cdot ||(e_n)_{n=1}^\infty||_{1,w} \\
&= ||u||
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
||\Psi(u)||_{1,w} &= ||(ue_n)||_{1,w} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_n |\varphi(ue_n)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} ||\varphi(ue_n)||_1 .
\end{aligned}$$

Usando o fato conhecido de que $(\ell_1)' = \ell_\infty$ e o teorema de Hahn-Banach obtemos,

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in B_{E'}} ||\varphi(ue_n)||_1 &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\beta_n) \in \ell_\infty} \left| \sum_n |\beta_n \varphi(ue_n)| \right| \\
&\overset{c_0 \subset \ell_\infty}{\geq} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\beta_n) \in c_0} \left| \sum_n |\beta_n \varphi(ue_n)| \right| \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{(\beta_n) \in c_0} \left| \varphi\left(\sum_n \beta_n u(e_n) \right) \right| \\
&= \sup_{(\beta_n) \in c_0} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \varphi\left(\sum_n \beta_n u(e_n) \right) \right| \\
&\overset{\text{H-Banach}}{=} \sup_{(\beta_n) \in c_0} \left\| \sum_n \beta_n u(e_n) \right\| \\
&= \sup_{(\beta_n) \in c_0} \left\| u\left(\sum_n \beta_n e_n \right) \right\| \\
&\overset{\text{def}}{=} ||u|| .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$||\Psi(u)|| = ||u|| .$$

□

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams & J.J.F Fournier, *Sobolev Spaces*, Elsever, Second Edition, 2003.

[2] N. Albuquerque, T. Nogueira & D. Pellegrino , *Some aplications of the Hölder inequality for mixed sums*, arXiv:1509.09162v1, 2015.

[3] N. Albuquerque, G. Araújo, D. Pellegrino & J.B Seoane-Sepúlveda, *Hölder's inequality: Some recent and unexpected applications*, arXiv:1412.2017v3, 2015.

[4] N. Albuquerque, *Desigualdade de Bohnenblust-Hille: estimativas e comportamento assintótico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba, 2012.

[5] N. Albuquerque, F. Bayart, D. Pellegrino & J.B Seoane-Sepúlveda, *Sharp generalizations of the multilinear Bonhenblust-Hille inequality*, J. Funct. Anal. 266 (2014), 3726-3740.

[6] G. Araújo & D. Pellegrino, *Optimal Hardy-Littlewood type inequalities for m-linear forms on ℓ_p spaces with $1 \leq p \leq m$*, Archiv der Math. 105 (2015), 285-295.

[7] G. Araújo, *Some classical inequalities, summability of the multilinear operators and strange functions*, Tese de Doutorado, UFPB/UFCG, 2016.

[8] F. Bayart, D. Pellegrino & J.B. Seoane-Sepúlveda, *The Bohr radius of the n-dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{(\log n)/n}$* , Adv. Math. **264** (2014), 726-746.

[9] A. Benedeck & R. Panzone , *The space L_p, for mixed sums*, Duke Math. J. 28 1961 301-324.

[10] J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

[11] H. F. Bohnenblust & E. Hille, *On the absolute convergence of Dirichlet series*, Annals of Mathematics, 32 (1931) 600-622.

[12] F. Bombal, D. Pérez-García & I. Villanueva, *Multilinear extensions of Grothendieck theorem*, The Quartely Journal of Mathematics, 2004.

[13] G. Botelho, D. Pellegrino & E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[14] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[15] A. Defant & K. Floret, *Tensor Norms and Operators Ideals*, North-Holland Mathematics Studies 176.

[16] A. Defant, L. Frerick, J. Ortega-Cerdà, M. Ounaïes, K. Seip , *The Bohnenblust-Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive*, Annals of Mathematics, (2) 174 (2011), 485-497.

[17] A. Defant & P.S. Peris, *A new multilinear insight on Littlewood's $\frac{4}{3}$-inequality*, J. Funct. Anal, 256 (2009) 1642-1664.

[18] J. Diestel, H. Jarchow & A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[19] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces* , Springer-Verlag (1984).

[20] V.V. Fávaro, *Tipo e cotipo de espaços de Banach e espaços L_p de Banach*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.

[21] J. J. F. Fournier, *Mixed norms and rearrangements: Sobolev's inequality and Littlewood's inequality*, Ann. Math. Pura Appl. (4) **148** (1987), 51-76, DOI 10.1007/BF01774283. MR932758 (89e:46037).

[22] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey Into Linear Analysis*, Cambridge University Press, 2007.

[23] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1-79.

[24] U. Haagerup, *The Best constants in Khinchine inequality*, Studia Math, 70 (1982) 231-283.

[25] G. Hardy, J. Littlewood, & G.Polya , *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Second Edition, 1951.

[26] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, Coleção matemática universitária, IMPA, 9^a Edição, 2016.

[27] W. A. J. Luxemburg, *Banach Functions Spaces*, Essen, 1955.

[28] M.S. MacPhail, *Absolute and unconditional convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. **53**, (1947). 121–123.

[29] L. Maligranda, *Why Hölder's inequality should be called Rogers'inequality*, Mathematical Inequalities & applications, vol.1, $n^o 1$ (1998), 69-83.

[30] D. Marcela Serrano Rodríguez, *Resultados de Coincidência para Operadores Multilineares Múltiplo Somantes*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2011.

[31] M.C. Matos, *Fully absolutely summing mappings and Hilbert Schmidt operators*, Collect. Math. **54** (2003) 111–136.

[32] R. D. Mauldin, *The Scottish Book*, Second Edition, Birhäuser, 2015.

[33] A. Montanaro, *Some applications of hipercontractive inequalities in quantum information theory*, J. Math. Physics **53** (2012), no. 12, 122206.

[34] D. Nuñez-Alarcón, *O Teorema de Bohnenblust-Hille*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2011.

[35] D. Nuñez-Alarcón, D. Pellegrino & J. B. Seoane-Sepúlveda, *On the Bohnenblust-Hille inequality and a variant of Littlewood's $\frac{4}{3}$ inequality*, J. Funct. Anal. **264** (2013), no. 1, 326-336.

[36] D. Pellegrino & J. Santos, *Absolutely summing multilinear operators: A panorama*, Quest. Math 34 (2016), 447-478.

[37] D. Pellegrino, *The optimal constants of the mixed (ℓ_1, ℓ_2)-Littlewood inequality*, J. Number Theory 160 (2016), 11-18.

[38] D. Pérez-García , *Operadores multilineales absolutamente sumantes*, Tesis, 2003.

[39] D. Popa, *Multiple Rademacher means and their applications*, J.Math. Anal. Appl. 386 (2012), 699–708.

[40] T. Praciano-Pereira, *On bounded multilinear forms on a class of ℓ_p spaces.* J. Math. Anal. Appl. **81** (2): 561-568, 1981.

[41] M. L. V. Souza, *Aplicações multilineares completamente absolutamente somantes*, Tese, Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, 2003.